Stabilitätsuntersuchung von linearen stochastischen Differentialgleichungen nach der Methode von Ljapunov

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

ULRICH WÜSTEN

1982

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547222_0034

Stabilitätsuntersuchung von linearen stochastischen Differentialgleichungen nach der Methode von Ljapunov

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

ULRICH WÜSTEN

UNIV.
LEIDEN
NBL.

Dissertation eingereicht am: 10.11.1982
Tag der mündlichen Prüfung: 22.12.1982

Dekan: Prof. Dr. D. Braess
Referent: Prof. Dr. V. Baumann
Korreferent: Prof. Dr. S. Albeverio

Für Gabi

Inhalt Seite

0. Einleitung 1

1. Stabilität und stochastische Differentialgleichungen 8

2. Die stochastische Ljapunov-Methode 13

3. Die skalare lineare stochastische Differentialgleichung 20

4. Die Klasse der Ljapunov-Funktionen $V(x) = (x^T Px)^\alpha$ 23

5. Die definite Zerlegung des Diffusionsterms in $LV(x)$ 34

6. Einfache n-dimensionale stochastische Differentialgleichungen 40

7. Die gestörte lineare Gleichung n-ter Ordnung 47

8. Die zweidimensionale lineare stochastische Differentialgleichung 51

9. Vergleiche mit vorhandenen Resultaten für zweidimensionale stochastische Differentialgleichungen 57

10. Fragen der Modellbildung 62

0. Einleitung

Auf vielen Gebieten naturwissenschaftlicher Forschung können realistische Modelle dynamischer Vorgänge mit Hilfe stochastischer Differentialgleichungen, also dynamischer Systeme mit zufälligen Parameterprozessen, gewonnen werden.

So führen Erscheinungen wie das Rauschen des Verstarkers in einem Regelkreis, vibrierende axiale Belastungen eines Balkens oder Umwelteinflüsse auf ein ökologisches System zu Gleichungen der Form

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t),y(t)) \qquad , \tag{0.1}$$

wobei x(t) z.B. das zeitliche Verhalten einer Regelgröße, der Durchbiegung eines Balkens bzw. der Größe einer Population beschreibt und y(t) die zufälligen Koeffizienten des Prozesses darstellt, der die Entwicklung des Systems beeinflußt.

Wir spezifizieren nun die obige Beschreibung (0.1) eines solchen Systems und nehmen an, daß es durch die Addition eines "deterministischen" Terms, der die zeitliche Entwicklung wie eine gewöhnliche Differentialgleichung beschreibt, und eines stochastischen "Störterms" beschrieben werden kann.

Als auftretende stochastischen Prozesse werden wir gaußsches weißes Rauschen verwenden. Die damit auftretenden Fragen der Modellbildung sowie der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Interpretationen stochastischer Differentialgleichungen im Sinne von Ito bzw. Stratonovich werden wir in Kapitel 10 behandeln, in dem wir u.a. zeigen, daß ein deterministisch instabiles Differentialgleichungssystem durch "physikalisch realisierbare" Störterme stabilisiert werden kann.

Allgemein können wir feststellen, daß das in vielen realen Systemen auftretenden Rauschen gut durch weißes Rauschen approximiert werden kann. Selbst in den Fällen, in denen das auf das gegebene System einwirkende Rauschen offenkundig kein weißes ist, sondern über ein endliches Gedächtnisintervall τ verfügt (d.h. die Werte des Rauschens, die den Zeitpunkten t_1 und t_2 entsprechen, wobei $|t_2 - t_1| > \tau$ ist, sind praktisch unabhängig), kann man häufig zu einem nahen System übergehen - mit einem anderen Zeitmaßstab - , das von weißem Rauschen gestört wird (s. z.B. Blankenship/Papanicolaou(1)). Wir werden uns also mit stochastischen Differentialgleichungen des Typs

$$dx = f(x)dt + \sigma(x)dw \tag{0.2}$$

beschäftigen und diese im "Ito-Sinne" interpretieren.

Da "Stabilität" eine grundlegende qualitative Eigenschaft von natürlichen oder technischen Systemen ist, wird mit der Modellierung von dynamischen Systemen durch stochastische Differentialgleichungen die qualitative Analyse dieser Gleichungen bedeutsam. Dabei ist es natürlich wichtig, möglichst effiziente Methoden zu verwenden, die - wie bei der qualitativen Untersuchung gewöhnlicher Differentialgleichungen - das Lösen bzw. Integrieren der gegebenen stochastischen Differentialgleichung vermeiden. Die Grundzüge der Übertragung der damit angesprochenen Ljapunov-Methode aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf das Gebiet der stochastischen Differentialgleichungen vom Typ (0.2) stellen wir in Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit zusammen. Hierbei haben wir darauf geachtet, daß die Definitionen und Sätze so nahe wie möglich an den entsprechenden Definitionen und Sätzen der deterministischen Theorie bleiben.

Damit folgen wir Kozin(1), der für die praktische Anwendung der stochastischen Stabilitätstheorie den Begriff der Stabilität mit Wahrscheinlichkeit 1 ("sample-stability") für angemessen hält, da wir tatsächlich nur Realisierungen der stochastischen Differentialgleichung beobachten können.

Analog zur Stabilitätstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen können wir zur Untersuchung des qualitativen Verhaltens der Lösungen der stochastischen Differentialgleichung (0.2) in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes übergehen zur Untersuchung der durch Taylor-Reihen-Entwicklung linearisierten Gleichung. Wir können uns also auf die Analyse der linearen n-dimensionalen stochastischen Differentialgleichung

$$dx = Axdt + \sum_{r=1}^{m} C_r x dw_r \tag{0.3}$$

beschränken.(s.Khasminskii(1))
Besonders bedeutsam für unsere Untersuchungen ist der Zusammenhang zwischen Stabilität m.W.1 und der Stabilität im p-ten Mittel. Im Kapitel 3 geben wir anhand der eindimensionalen stochastischen Differentialgleichung eine Motivation für unser Vorgehen, mit Hilfe von Funktionen p-ten Grades für $p \to 0$ den Stabilitätsbereich für die Stabilität m.W.1 auszuschöpfen.

Wie im deterministischen Falle besteht jedoch auch bei der stochastischen Ljapunov-Methode die Schwierigkeit, geeignete Hilfsfunktionen zu finden. Als Kandidaten wählen wir Potenzen positiv-definiter quadratischer Formen

$$V(x) = (x^T P x)^{p/2} \tag{0.4}$$

wobei P eine positiv-definite, symmetrische Matrix ist.

In Kapitel 4 gehen wir der Frage nach, ob die Klasse dieser Hilfsfunktionen groß genug ist, um die Stabilitätsuntersuchung von (0.3) optimal durchführen zu können.

Tatsächlich erhalten wir mit Hilfe dieser Funktionen Stabilitätsresultate, die weniger konservativ sind als die mit den bisher üblichen quadratischen Ljapunov-Funktionen - z.B. von Kushner(2) - berechneten Ergebnisse, wobei wir "weniger konservativ" in dem Sinne verstehen, daß der Stabilitätsbereich im Parameterraum weitergehend als mit anderen Methoden erfaßt wird. Die mit quadratischen Ljapunov-Funktionen ermittelten Stabilitätsresultate entsprechen denjenigen für Stabilität im Quadratmittel (s. Sagirow(1)) und sind deshalb für viele Aspekte der Anwendung zu konservativ.

Zwar weist Willems(2) darauf hin, daß es "interessant sein könnte, andere Typen von Ljapunov-Funktionen als die bisher üblichen quadratischen zu untersuchen, um weniger konservative Bedingungen für Stabilität m.W.1 zu erhalten, die nicht notwendigerweise Quadratmittel-Stabilität impliziert", jedoch wurde diese Untersuchung mit Funktionen der Form (0.4) für kleine p nur ansatzweise durchgeführt. So bemerkt Kushner(2) bei der Stabilitätsanalyse einer bestimmten stochastischen Differentialgleichung, daß sich seine Ergebnisse - mit einer quadratischen Ljapunov-Funktion gewonnen - durch eine Funktion der Form (0.4) mit kleinem p sicher verbessern lassen, ohne jedoch diese Untersuchung durchzuführen.

Khasminskii(1) benutzt diese Funktionen und stellt den infinitesimalen Operator von (0.4) bezüglich (0.3) explizit dar. Schwierigkeiten bei der Auswertung entstehen jedoch durch diejenigen Terme, die durch die zweiten Ableitungen in den infinitesimalen Operator gelangen, da diese in der Darstellung von Khasminskii(1) indefinit sind.

In Kapitel 5 beschäftigen wir uns mit diesen Termen und erhalten das Hauptresultat dieser Arbeit, indem wir zeigen, wie diese Terme in einen negativ-semi-definiten und einen positiv-semi-definiten Teil aufgespaltet werden können.
Damit können wir z.B. die Anteile der Diffusion, die stabilisierend bzw. destabilisierend wirken, erkennen, und dies im Kapitel 10 bei der Behandlung der Frage der Stabilisierung durch Rauschen zur Beantwortung dieser Frage benutzen.

Weiter können wir durch diese Zerlegung in zwei semi-definite Teile die Abschätzungen für den Stabilitätsbereich, die Khasminskii(1) angibt, - insbesondere für den Fall einer degenerierten Diffusionsmatrix - verbessern, so daß wir damit auch für den n-dimensionalen Fall relativ einfach zu erhaltende Stabilitätskriterien bestimmen können, die über den Bereich der Quadratmittel-Stabilität hinausgehen.

Neben diesen Abschätzungen untersuchen wir in Kapitel 6 einige einfache n-dimensionale stochastische Differentialgleichungen mit unserer Methode und vergleichen diese Resultate mit den bisher bekannten. Dabei zeigt sich, daß wir mit relativ einfachen Methoden die gleichen Ergebnisse wie andere Autoren erhalten können, die kompliziertere Verfahren zur Bestimmung des Stabilitätsverhaltens anwenden.

Daß dieser Ansatz bisher nicht weiter untersucht wurde, liegt wohl an Khasminskiis wichtiger Arbeit (3). Darin konnte er zeigen, daß die Stabilität oder Instabilität eines linearen stochastischen Systems mit zeitunabhängigen Koeffizienten durch das Vorzeichen der mathematischen Erwartung einer bestimmten Funktion bestimmt wird, die sich bezüglich der stationären Verteilung eines gewissen Markov-Prozesses auf der n-dimensionalen Einheitskugel berechnet.

Wie Friedman/Pinsky(1) bemerken, ist die sich hieraus ergebende Bedingung von sehr beschränktem Nutzen, da sie die explizite Kenntnis des invarianten Maßes dieses oben erwähnten Markov-Prozesses verlangt. Hinzu kommt, daß eine entscheidende Bedingung für die Anwendung dieses Ansatzes die Nicht-Degeneriertheit der Diffusionsmatrix ist, so daß sich für viele technisch relevante Systeme höherer Ordnung der von Khasminskii(3) dargestellte Ansatz nicht durchführen läßt.

Die Untersuchung von zweidimensionalen linearen stochastischen Differentialgleichungen kann zwar auch bei Verletzung der Nicht-Degeneriertheitsbedingung der Diffusion formal durchgeführt werden, da eine Rückführung auf eindimensionale Diffusionsprozesse auf dem Einheitskreis möglich ist. Jedoch scheitert eine konkrete Berechnung in fast allen Fällen an der Komplexität der auftretenden Terme (s. Nishioka(1)). So können die Stabilitätsbedingungen nur durch numerische Näherungen bestimmt werden.

In Kapitel 8 und 9 können wir zeigen, daß unsere Resultate mit denjenigen des Khasminskii-Ansatzes übereinstimmen, wenn der Khasminskii-Ansatz eine analytische Auswertung zuläßt, und daß wir durch Eigenwert-Abschätzungen die gleichen qualitativen Ergebnisse wie durch die numerische Bestimmung der Khasminskii-Bedingungen erhalten können.

Für höherdimensionale stochastische Differentialgleichungen mit degenerierter Diffusionsmatrix läßt sich der Khasminskii-Ansatz nicht mehr verwenden, da die Eigenschaften der hier auftretenden Diffusionsprozesse in der Nähe von Singularitäten nicht mehr wie im eindimensionalen Fall klassifiziert werden können. Deshalb gewinnt unser Verfahren Bedeutung, da viele stochastische Differentialgleichungen aus der technischen Anwendung eine degenerierte Diffusionsmatrix besitzen.

Dies gilt insbesondere für die gestörte lineare Gleichung n-ter Ordnung, deren Stabilitätsverhalten wir in Kapitel 7 untersuchen. Auch hier besteht die Möglichkeit, mit unserem Ansatz die bisher erhaltenen Stabilitätsresultate für höherdimensionale Gleichungen zu verbessern.

Ein weiteres wesentliches Ergebnis dieser Arbeit beantwortet am Ende von Kapitel 10 die Frage nach der Stabilisierbarkeit eines deterministischen unstabilen Systems durch Rauschen. Durch die Anwendung unserer Zerlegung des infinitesimalen Operators können wir einen elementaren Beweis für die Möglichkeit der Stabilisierung führen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß sich mit diesem Ansatz auch die Ergebnisse der Übertragung des Konzeptes der Vektor-Ljapunov-Funktionen auf stochastische Differentialgleichungen von Rasmussen/Michel(1) und Michel/Rasmussen(1) sicherlich verbessern lassen, da diese ausschließlich mit quadratischen Funktionen arbeiten.
In einer jüngst erschienenen Arbeit untersucht Sasagawa (1) ebenfalls die Stabilität linearer stochastischer Differentialgleichungen mithilfe von Potenzen quadratischer Formen. Da er aber nur mit Formen arbeitet, deren Grad größer oder gleich 2 ist, kann er keine Verbesserung der Stabilitätsresultate erreichen.

1. Stabilität und stochastische Differentialgleichungen

Im Mittelpunkt unserer Untersuchung steht das qualitative Verhalten der stochastischen Differentialgleichung im Ito-Sinne

$$dx = f(x)dt + \sigma(x)dw \tag{1.1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0 \tag{1.2}$$

oder ausführlich

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds + \int_0^t \sigma(x(s))dw(s) \quad , \tag{1.3}$$

wobei $x(t)$ ein R^n-wertiger stochastischer Prozeß ist und $w(t)$ ein m-dimensionaler Wiener-Prozeß ist mit dem Erwartungswert

$$E(w(t)) = 0 \tag{1.4}$$

und der Kovarianzmatrix

$$E(w(t)w(s)^T) = \min(t,s)\cdot I \quad . \tag{1.5}$$

Wir setzen voraus, daß die R^n-wertige Funktion f und die $n\times m$-matrixwertige Funktion σ Bedingungen erfüllen, die die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung garantieren (s. z.B. Arnold(1),S.118f.).

Unter diesen Bedingungen hat der Lösungsprozeß $x(t) = x(t,\omega)$ der stochastischen Differentialgleichung (1.1)-(1.2) u.a. die folgenden Eigenschaften:
((1.7) stellt den Satz von Ito dar, vgl. z.B. Arnold (1))

(i) $x(t)$ ist ein starker Markov-Prozeß, der für alle $t \geq 0$ existiert; genauer: $x(t)$ ist ein n-dimensionaler Diffusionsprozeß mit dem Driftvektor f und der Diffusionsmatrix $B = \sigma \cdot \sigma^T$,

(ii) $x(t)$ ist stetig mit Wahrscheinlichkeit 1 (m.W.1), separabel und für jedes $0 \leq b < \infty$ gilt:

$$E\Big(\max_{0 \leq t \leq b} |x(t)|^2 \Big) < \infty \quad ,$$

(iii) zum Lösungsprozeß $x(t)$ gehört der infinitesimale Operator

$$L = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{d}{dx_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) \frac{d^2}{dx_i dx_j} \tag{1.6}$$

wobei $(b_{ij}) = B$,

(iv) sei $u: R^n \to R$ eine stetige Funktion mit den stetigen partiellen Ableitungen

$$\frac{d}{dx_i} u(x) = u_{x_i} \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{dx_i dx_j} u(x) = u_{x_i x_j}$$

wobei $x = (x_1, .., x_n)^T$ und $i,j \leq n$; dann besitzt der Prozeß $y(t) = u(x(t))$ ein stochastisches Differential bzgl. desselben Wiener-Prozesses $w(t)$ mit dem Anfangswert $y(0) = u(x(0))$ und es ist

$$du(x(t)) = (Lu(x(t)))dt + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_{x_i}(x(t)) \sigma_{ij}(x(t)) dw_j \,. \tag{1.7}$$

Als begleitende Schar der Ereignis-sigma-Algebren N_t wählen wir die kleinste sigma-Algebra, bzgl. der der Anfangswert

x_0 und die Zufallsgröße w(s) meßbar sind; also

(1.8) $$N_t = A(x_0;\ w(s),\ s \leq t) \quad .$$

Wir setzen weiter fest, daß x_0 m.W.1 eine Konstante ist, woraus die Existenz aller Momente $E\{|x(t)|^k\}$, $k > 0$, folgt (s. Arnold(1),S.129), und erhalten damit

(1.9) $$N_t = A(w(s),\ s \leq t) \quad .$$

Für das stochastische Differentialgleichungssystem (1.1)-(1.2) nehmen wir an, daß

(1.10) $$f(0) = \sigma(0) = 0$$

gilt. Der Nullpunkt soll also Gleichgewichtspunkt von (1.1)-(1.2) sein.
Hieraus folgt, daß der Nullpunkt eine nicht-erreichbare Menge für x(t) ist (s. Khasminskii(1),S.162), d.h.

(1.11) $$P\{\ \tau_0 < \infty\ \} = 0$$

wobei

(1.12) $$\tau_0 = \inf\{\ t:\ x(t) = 0\ \} \quad .$$

Wir erinnern noch daran, daß ein stochastischer Prozeß y(t) m.W.1 gegen Null konvergiert, falls für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

(1.13) $$\lim_{T \to \infty} P\{\ \sup_{T<t<\infty} |y(t)| \geq \varepsilon\ \} = 0$$

und definieren nun - um so nahe wie möglich an dem in der deterministischen Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen gebräuchlichen "pfadweisen" Stabilitätsbegriff

(s. z.B. LaSalle/Lefschetz(1)) zu bleiben - unter Beachtung von (1.13)

Definition 1.1.:

$x = 0$ heißt stabil bzgl. (1.1) m.W.1 $\leftrightarrow$
für alle $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon,\rho)$ mit:
$|x_0| < \delta \rightarrow P\{ \sup_t |x(t)| \geq \varepsilon \} < \rho$.

(s. z.B. Kushner(1),S.31)

Diese Definition kann folgendermaßen interpretiert werden: Man kann zu beliebigem ε und ρ ein δ so angeben, daß alle Pfade mit einem Startpunkt in x_0, $|x_0| \leq \delta$, für alle Zeiten in einer ε-Umgebung des Nullpunktes verlaufen - mit Ausnahme einer Menge von Pfaden, die mit einer Wahrscheinlichkeit von kleiner als ρ auftreten. Da ρ in diesem Sinne beliebig ist, ist der Begriff "m.W.1" gerechtfertigt.

Eine äquivalente Formulierung ist

$$\lim_{x_0 \to 0} P\{ \sup_t |x(t)| \geq \varepsilon \} = 0 \quad . \tag{1.14}$$

(s. Arnold(1),S.191)

Definition 1.2.:

$x = 0$ heißt asymptotisch stabil m.W.1 bzgl. (1.1) $\leftrightarrow$
$x = 0$ ist stabil bzgl. (1.1) m.W.1 und $x(t) \rightarrow 0$ m.W.1 für $x(0)$ aus einer Umgebung $U(0)$ des Nullpunktes.

Definition 1.3.:

$x = 0$ heißt instabil in Wahrscheinlichkeit bzgl. (1.1) $\leftrightarrow$
$x = 0$ ist nicht stabil m.W.1 bzgl. (1.1).

Tatsächlich reduzieren sich im Falle $\sigma(x) = 0$ für alle x diese Definitionen auf die entsprechenden aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

In der Definition der Stabilität m.W.1 geht der gesamte Verlauf der Pfade $x(t,\omega)$ für $t \geq 0$ ein. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ und der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ sammeln wir alle diejenigen Pfade, die für alle Zeitpunkte t in einer ε-Umgebung des Nullpunktes bleiben. Die Wahrscheinlichkeit dieser Menge muß bei einem stabilen System nahe bei 1 sein, falls nur $|x_0|$ klein genug ist.

Ein anderes Stabilitätskonzept erhält man mit folgendem Vorgehen:
Für festes t mittelt man zuerst über alle möglichen Werte von x(t) oder einer Funktion g(x(t)), d.h. man bildet

$$E\{ g(x(t)) \} \tag{1.15}$$

und prüft die somit entstandene deterministische Kurve auf ihren Verlauf für $t \geq 0$. Speziell für $g(x) = |x|^p$, $p > 0$, erhalten wir:

Definition 1.4.:

$x = 0$ heißt im p-ten Mittel stabil, $p > 0$, bzgl.(1.1) $\leftrightarrow$
für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit
$|x_0| \leq \delta \rightarrow \sup_t E\{ |x(t)|^p \} \leq \varepsilon$.

Definition 1.5.:

$x = 0$ heißt im p-ten Mittel asymptotisch stabil, $p > 0$, bzgl. (1.1) $\leftrightarrow$
$x = 0$ ist im p-ten Mittel stabil bzgl. (1.1) und $\lim_{t\to\infty} E\{|x(t)|^p\} = 0$ für x_0 aus einer Umgebung U(0) des Nullpunktes.

Ist $p = 1$ bzw. $p = 2$, so sprechen wir von Stabilität im Mittel bzw. im Quadratmittel.

2. Die stochastische Ljapunov-Methode

Die in 1. angeführten Stabilitätsdefinitionen sind allerdings schwer zu verifizieren, da die Kenntnis der Lösung der stochastischen Differentialgleichung vorausgesetzt wird. Diese liegt aber nur in wenigen Fällen exakt vor. Deshalb wollen wir die aus der qualitativen Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannte Ljapunov-Theorie übernehmen.
Wir notieren die Grundzüge dieser Theorie:
Sei

$$\frac{d}{dt} x = f(x) \tag{2.1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(o) = x_o \tag{2.2}$$

eine n-dimensionale gewöhnliche Differentialgleichung, deren eindeutige globale Lösung existiert und für die gilt

$$f(0) = 0 \quad . \tag{2.3}$$

Wie oben bemerkt, übertragen sich die Stabilitätsdefinitionen 1.1. und 1.2. auf diesen Fall. Unter der Annahme, daß in einer Umgebung U(0) des Nullpunktes eine positiv-definite Funktion v(x) existiert (unter "positiv-definit" verstehen wir immer "strikt positiv-definit" im Unterschied zu "positiv-semi-definit") mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung und daß x(t) eine Lösung von (2.1)-(2.2) ist, gilt

$$\frac{d}{dt} v(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dv}{dx_i} f_i(x(t)) \quad . \tag{2.4}$$

Ist nun dieser Ausdruck negativ, so verläuft x(t) so, daß die Werte von v(x(t)) sich verkleinern, d.h. der durch v

gemessene "Abstand" von x(t) vom Nullpunkt verkleinert sich. Damit können wir folgenden Satz formulieren:

Satz 2.1.:

Gibt es eine stetige, positiv-definite Funktion $v:U(0) \to R_+$, die in U(0) - evtl. unter Ausnahme des Nullpunktes - differenzierbar ist, und für die gilt:

$$\frac{d}{dt} v(x) < 0 \tag{2.5}$$

für $x \in U(0)$, $x \neq 0$, dann ist $x = 0$ asymptotisch stabil bzgl. (2.1).

Beweis:

s. z.B. Hirsch/Smale(1), S.193.

Wir wollen nun diesen Ansatz auf die Stabilitätsuntersuchung stochastischer Differentialgleichungen übertragen. Sei also x(t) die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1.1) und $v:U(0) \to R_+$ eine positiv-definite Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen v_{x_i}, $v_{x_i x_j}$. Dann gilt nach (iv)

$$dv(x(t)) = (Lv(x(t)))dt + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} v_{x_i}(x(t)) c_{ij}(x(t)) dw_j \tag{2.6}$$

Für ein asymptotisch stabiles System soll gelten, daß v(x(t)) abnimmt, also dv(x(t)) < 0. Wegen des in (2.6) vorhandenen Fluktuationsterms ist es aber sinnvoll zu fordern, daß

$$E\big(dv(x(t))\big) = E\big((Lv(x(t)))dt\big) < 0 \tag{2.7}$$

also

$$Lv(x(t)) < 0 \quad . \tag{2.8}$$

Schreiben wir (2.6) ausführlich, so ist

$$v(x(t)) = v(x_0) + \int_0^t Lv(x(s))ds + \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_{x_i}(x(s))\sigma_{ij}(x(s))dw_j \tag{2.9}$$

wobei

$$\{ \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v_{x_i}(x(s))dw_j \; ; \; N_t \} \tag{2.10}$$

ein Martingal ist (s. Arnold(1), S.94).
Also ist für $t \geq s$ mit (2.8)

$$E\big(v(x(t)) - v(x(s))\,\big|N_s\big) = E\Big(\int_s^t Lv(x(u))du\,\Big|N_s\Big) < 0 \tag{2.11}$$

bzw.

$$E\big(v(x(t))\,\big|N_s\big) < v(x(s)) \quad . \tag{2.12}$$

Damit ist unter der Bedingung (2.8) $v(x(t))$ ein Supermartingal und mit der Supermartingal-Ungleichung ergibt sich

$$P\{ \sup_t v(x(t)) \geq \varepsilon \} \leq \frac{1}{\varepsilon} v(x_0) \tag{2.13}$$

und hieraus - nach einer Umformung in die "ε-δ-Sprache" - die Stabilitätsdefinition 1.1..

Wir sehen also, daß für die Übertragung der Ljapunov-

Theorie auf die Stabilitätsuntersuchung stochastischer Differentialgleichungen die Supermartingal-Eigenschaft von $v(x(t))$ grundlegend ist. Diese Eigenschaft ist im allgemeinen nicht gegeben, wenn die Bedingung (2.8) innerhalb der Umgebung $U(0)$ verletzt wird. Da wir jedoch in den Anwendungen positiv-definite Funktionen verwenden wollen, die im Nullpunkt nicht differenzierbar sind, müssen wir zusätzlich auf einen von Khasminskii gezeigten Sachverhalt hinweisen:

Lemma 2.1.:

Ist Γ eine Menge aus $U(0)$, die für die Lösung $x(t)$ der stochastischen Differentialgleichung (1.1) nicht-erreichbar ist und ist $Lv(x(t)) \leq 0$ auf $U(0)/\Gamma$, dann ist $v(x(\tau_{U(0)}(t)))$ ein Supermartingal, wobei $\tau_{U(0)}(t) = \min(\tau,t)$ und τ die Erst-Austritts-Zeit von $U(0)$ ist.

Beweis:
s. Khasminskii(1), S.160

Da wir wissen, daß der Nullpunkt nicht-erreichbar ist, können wir nun folgenden Satz formulieren:

Satz 2.2.:

Für die stochastische Differentialgleichung (1.1) mit dem infinitesimalen Operator (1.6) existiere eine positiv-definite Funktion $V:R^n \to R_+$, die in einer Umgebung $U(0)$ des Nullpunktes - evtl. unter Ausnahme des Nullpunktes - zweimal stetig differenzierbar ist und für die gilt

$$V(0) = 0 \tag{2.14}$$

und

$$LV(x) \leq 0 \text{ für } x \in U(0),\ x \neq 0, \tag{2.15}$$

dann ist $x = 0$ stabil bzgl. (1.1).

Gilt sogar

(2.16) $\quad LV(x) < 0 \quad$ für $x \in U(0)$, $x \neq 0$,

dann ist $x = 0$ asymptotisch stabil m.W.1 bzgl. (1.1).

Beweis:
s. z.B. Arnold(1), S.193

Zum Nachweis der Instabilität in Wahrscheinlichkeit werden wir folgenden Satz gebrauchen:

Satz 2.3.:
Für die stochastische Differentialgleichung (1.1) mit dem infinitesimalen Operator (1.3) existiere eine für $\{0<|x|\leq h\}$ definierte Funktion $V(x)$, die dort zweimal stetig differenzierbar ist und für die gilt

(2.17) $$\lim_{x \to 0} V(x) = \infty$$

und

(2.18) $$\sup_{\varepsilon<|x|\leq h} LV(x) < 0 \quad \text{für alle } 0 < \varepsilon < h,$$

dann ist $x = 0$ instabil in Wahrscheinlichkeit bzgl. (1.1). Darüber hinaus gilt

(2.19) $$P\{\sup_t |x(t)| < h\} = 0 \quad \text{für } x_0 \text{ aus } U_h(0).$$

Gilt statt (2.18) lediglich

(2.20) $$\sup_{\varepsilon<|x|\leq h} LV(x) \leq 0 \quad \text{für alle } 0 < \varepsilon < h,$$

so müssen wir zusätzlich

(2.21) $$y \cdot \sigma(x) \cdot \sigma(x)^T \cdot y^T \geq m(x)|y|^2$$

für alle $y \in R^n$, $|x| \leq h$ und m positiv-definite Funktion, fordern.

Beweis:
s. z.B. Khasminskii(2), S.1560.

Für die Stabilität im p-ten Mittel zitieren wir

Satz 2.4.:
Hinreichend für die asymptotische Stabilität im p-ten Mittel von $x = 0$ bzgl. der stochastischen Differentialgleichung (1.1) ist die Existenz einer in R^n definierten stetigen, für alle $x \neq 0$ zweimal partiell stetig differenzierbaren Funktion $V(x)$, die für positive Konstanten c_1, c_2 und c_3 die Ungleichungen

(2.22) $$c_1|x|^p \leq V(x) \leq c_2|x|^p$$

und

(2.23) $$LV(x) \leq -c_3|x|^p$$

erfüllt.

Beweis:
s. z.B. Arnold(1), S.199.

Wir sehen also, daß wir auf die Differenzierbarkeit im Nullpunkt verzichten können, nicht aber auf die Positiv-Definitheit der Ljapunov-Funktion.

Bemerkung:

In einer Arbeit über das Stabilitätsverhalten einer zweidimensionalen stochastischen Differentialgleichung, die zur Beschreibung eines ökologischen Sachverhaltes benutzt wird, verwendet Polansky (1) bei der Untersuchung eines Beispiels eine Hilfsfunktion der Form

(2.24) $V(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Ex+Fy.$

Da diese Funktion indefinit ist, sind seine damit erzielten Ergebnisse (S.339,Theorem3.2.) nicht korrekt.

3. Die skalare lineare stochastische Differentialgleichung

Zur Motivierung unseres Ansatzes betrachten wir zunächst die skalare lineare stochastische Differentialgleichung

$$dx = axdt + \sigma x dw \quad , \quad x(0) = 0 = \text{const.} \tag{3.1}$$

und deren Stabilitäts- bzw. Instabilitätsverhalten.

Für diese "einfache" stochastische Differentialgleichung können wir die Lösung explizit mit

$$x(t) = x_0 \exp((a - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma w(t)) \tag{3.2}$$

angeben und haben damit die Möglichkeit, die Ergebnisse der Ljapunov-Theorie zu überprüfen.
Wegen des starken Gesetzes der großen Zahlen ist

$$\lim_{t \to \infty} \frac{w(t)}{t} = 0 \qquad \text{m.W.1} \tag{3.3}$$

und damit gilt:
$x = 0$ ist bzgl. (3.1) asymptotisch stabil m.W.1, falls

$$a < \frac{\sigma^2}{2} \quad . \tag{3.4}$$

Für das p-te Moment der Lösung erhalten wir

$$E\left(|x(t)|^p\right) = |x_0|^p \exp((p(a - \frac{\sigma^2}{2}) + p^2\frac{\sigma^2}{2})t) \tag{3.5}$$

und können aus dieser Darstellung schließen:
$x = 0$ ist bzgl. (3.1) im p-ten Mittel asymptotisch stabil, falls

$$a < (1 - p)\frac{\sigma^2}{2} \qquad (3.6)$$

Damit sind die Punkte des Parameter-Raums (a,σ^2), für die asymptotische Stabilität m.W.1 - nämlich (3.4) - vorliegt, genau diejenigen, für die für hinreichend kleines $p \to 0$ asymptotische Stabilität im p-ten Mittel vorliegt. (vgl. auch Kozin/Sugimoto(2)).

Nach der Analyse der expliziten Lösung benutzen wir nun die Ljapunov-Methode.
Wir wählen als Hilfsfunktion

$$V(x) = (x^2)^{\alpha} \qquad (3.7)$$

und erhalten mit dem infinitesimalen Operator

$$L = ax\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{d^2}{dx^2} \qquad (3.8)$$

für $x \neq 0$ mit (3.7)

$$LV(x) = \alpha x^{2(\alpha-1)}(x^2 2a + x^2\sigma^2 + 2(\alpha-1)x^2\sigma^2) \qquad (3.9)$$

und nach der Zusammenfassung der zwei letzten - durch die Diffusion "verursachten" - Summanden

$$LV(x) = 2\alpha x^{2\alpha}(a + (2\alpha-1)\tfrac{1}{2}\sigma^2) \qquad (3.10)$$

Für genügend kleines α ergibt dies:
Bedingung für asymptotische Stabilität m.W.1 von (3.1) ist die Relation (3.4).

Weiter erhalten wir mit $\alpha = \frac{1}{2}$ bzw. $\alpha = 1$ in (3.7) die Kriterien für die asymptotische Stabilität im Mittel bzw. Quadratmittel

$$a < 0 \qquad \text{bzw.} \qquad a < -\frac{\sigma^2}{2} \qquad (3.11)$$

(die natürlich mit der entsprechenden Bedingung (3.6) übereinstimmen).

Zur Bestimmung des Instabilitätsbereichs benutzen wir die Hilfsfunktion

$$V(x) = -\log(x^2) \tag{3.12}$$

und erhalten

$$LV(x) = -2a + \sigma^2 \quad . \tag{3.13}$$

Damit können wir Instabilität in Wahrscheinlichkeit für den Parameterbereich

$$a \geq \frac{\sigma^2}{2} \tag{3.14}$$

feststellen.

Wir sehen also, daß über die asymptotische Stabilität im p-ten Mittel für kleine p und eine Umformung der durch die Diffusion verursachten Summanden im infinitesimalen Operator mithilfe der Ljapunov-Methode in diesem Fall exakte Stabilitätsresultate erreicht werden können. Als nächstes werden wir dieses Vorgehen auf n-dimensionale lineare stochastische Differentialgleichungen verallgemeinern, wobei wir allerdings vorab klären, welche Typen von Ljapunov-Funktionen benötigt werden.

4. Die Klasse der Ljapunov-Funktionen $V(x) = (x^T Px)^\alpha$

Für die deterministische n-dimensionale Differentialgleichung

(4.1) $\qquad dx = Axdt$

existiert eine eindeutige Anleitung zur Konstruktion einer geeigneten Ljapunov-Funktion V(x), denn die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

(i) x = 0 ist asymptotisch stabil bzgl. (4.1)

(ii) Für die Eigenwerte λ_i der Matrix A gilt:

$$\text{Re } \lambda_i < 0 \quad \text{für } i = 1,..,n$$

(iii) Für die Matrixgleichung

$$PA + A^T P = -C$$

existiert für jede positiv-definite Matrix C eine positiv-definite Lösungsmatrix P

(s. z.B. LaSalle/Lefschetz(1)).

Über die Matrixgleichung in (iii) erhalten wir dann für (4.1) die Ljapunov-Funktion

(4.2) $\qquad V(x) = x^T Px \qquad .$

Damit wissen wir gleichzeitig, daß wir uns in diesem Fall bei der Suche nach Ljapunov-Funktionen auf die Klasse der positiv-definiten quadratischen Formen beschränken können.

Die bisher offene Frage, ob man sich bei der Stabilitätsanalyse von linearen stochastischen Differentialgleichungen ebenfalls auf eine bestimmte Klasse von Funktionen beschränken kann (vgl. Khasminskii(1), S.201), werden wir im folgenden untersuchen und einige Antworten geben.

Im folgenden werden wir die lineare autonome n-dimensionale stochastische Differentialgleichung

$$(4.3) \qquad dx = Axdt + \sum_{r=1}^{m} C_r x dw_r \quad ; \; x(0) = x_0 = \text{const.}$$

wobei A, C_r n×n-Matrizen sind, untersuchen.

Der Zusammenhang zwischen der Stabilität m.W.1 und der Stabilität im p-ten Mittel für die Gleichung (4.3) wird für uns von zentralem Interesse sein. Analog zur skalaren linearen stochastischen Differentialgleichung gelten folgende Sätze:

Satz 4.1.:

Ist x = 0 bzgl. (4.3) asymptotisch stabil m.W.1, so ist x = 0 bzgl. (4.3) asymptotisch stabil im p-ten Mittel für hinreichend kleine p.

Ist x = 0 bzgl. (4.3) im p-ten Mittel asymptotisch stabil, dann ist x = 0 bzgl. (4.3) asymptotisch stabil m.W.1 .

Beweis:
s. Khasminskii(1), S.205f.

Zwar gibt es analog zur deterministischen Theorie, in der man die Ljapunov-Funktion

$$(4.4) \qquad V(x) = \int_0^T |x(t)| dt$$

für asymptotisch stabile lineare Systeme - theoretisch - verwenden kann (s. Hirsch/Smale(1), S.150), für stochastische Differentialgleichungen, die m.W.1 asymptotisch stabil sind, die Ljapunov-Funktion

$$V(x) = \int_0^T E\,|x(t)|^p dt \qquad , \tag{4.5}$$

jedoch ist diese Funktion wie in der deterministischen Theorie (fast) nie explizit angebbar.
Über die Form der Ljapunov-Funktion für (4.3) gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 4.2.:

$x = 0$ ist asymptotisch stabil im p-ten Mittel bzgl. (4.3) genau dann, wenn eine Funktion $V(x)$ homogen vom Grade p existiert, für die gilt:

$$c_1|x|^p \leq V(x) \leq c_2|x|^p \tag{4.6}$$

$$LV(x) \leq -c_3|x|^p \tag{4.7}$$

$$\left|\frac{d}{dx_i}V(x)\right| \leq c_4|x|^{p-1} \tag{4.8}$$

$$\left|\frac{d^2}{dx_i dx_j}V(x)\right| \leq c_4|x|^{p-2} \qquad i,j = 1,..,n \tag{4.9}$$

wobei c_i, $i = 1,..,4$, positive Konstanten sind.

Beweis:
s. Khasminskii(1), S.200.

Wegen der Nicht-Differenzierbarkeit im Nullpunkt ist damit die Gestalt der Ljapunov-Funktionen noch nicht eindeutig festgelegt.

Für einen Spezialfall der linearen stochastischen Differentialgleichung (4.3) können wir jedoch ein dem deterministischen linearen Fall analoges Resultat finden.

Satz 4.3.:

Sind die in der stochastischen Differentialgleichung (4.3) auftretenden Matrizen A, $C_1,..,C_m$ kommutativ, d.h. gilt

$$AC_i = C_iA\ ,\quad C_iC_j = C_jC_i \qquad i,j=1,..,m\ , \tag{4.10}$$

dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(i) $x = 0$ ist asymptotisch stabil m.W.1 bzgl. (4.3)

(ii) Für die Eigenwerte λ_i der Matrix $A - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} C_r^2$ gilt:

$$\mathrm{Re}\ \lambda_i < 0 \qquad \text{für } i = 1,..,n$$

(iii) Für die Matrixgleichung

$$PA + A^TP - \sum_{r=1}^{m} C_r^TPC_r = -D$$

existiert für jede symmetrische, positiv-definite Matrix D eine symmetrische, positiv-definite Lösung P.

Beweis:
Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß unter der Bedingung (4.10) die zu (4.3) gehörende Fundamentallösung die Form

$$\Psi(t) = \exp((A - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} C_r^2)t + \sum_{r=1}^{m} C_rw_r(t)) \tag{4.11}$$

hat und daß notwendig und hinreichend für die asymptotische Stabilität die Negativität der Wachstumsordnung

(4.12) $$\lim_{t\to\infty} \frac{\log|x(t)|}{t} = q_0 < 0 \qquad \text{m.W.1}$$

ist.

Aus der Matrixgleichung (iii) erhalten wir dann mit dem Satz von Ito (1.7) die Ljapunov-Funktion

(4.13) $$V(x) = (x^T P x)^\alpha \qquad , \alpha \to 0 .$$

Für den Spezialfall aus Satz 4.3. reicht also die Familie der Potenzen von positiv-definiten, symmetrischen quadratischen Formen (4.13) aus.

Um zu einer Aussage über die Existenz und die Form von Ljapunov-Funktionen für eine größere Klasse von linearen stochastischen Differentialgleichungen zu kommen, betrachten wir nun (4.3) unter der Einschränkung der Nicht-Degeneriertheit (2.21) der Diffusionsmatrix und benutzen Ansätze von Pinsky(1) und Friedman(1).
Dazu zunächst einige Erläuterungen:

Definition 4.1.:

Sei $U = \{0<|x|<\delta\}$. Dann heißt eine in U zweifach stetig differenzierbare Funktion f in die reellen Zahlen S-Funktion, wenn gilt:

(4.14) $$\frac{df}{dx_i} \le c|x|^{-1} \qquad \text{für } x \in U$$

(4.15) $$f(x) \to -\infty \qquad \text{für } x \to 0$$

(4.16) $$Lf(x) \le -1 \qquad \text{für } x \in U$$

wobei L der infinitesimale Operator der stochastischen Differentialgleichung (4.3) ist.

Es gilt dann:

Lemma 4.1.:

Sei f eine S-Funktion für die stochastische Differentialgleichung (4.3), dann existiert eine positive Konstante K, so daß

$$L(\exp(Kf(x))) \leq 0 \quad \text{für } x \in U. \tag{4.17}$$

Beweis:
s. Pinsky(1), S.313.

Wir sehen also, daß die Klasse der S-Funktionen die Rolle der Logarithmen der "klassischen" Ljapunov-Funktionen spielt.

Wir zitieren im folgenden Friedman(1) und Pinsky(1), die die Existenz einer bestimmten Form von S-Funktionen zeigen.

Es sei zunächst bemerkt, daß sich für Funktionen

$$u(x) = v(\rho,\theta) = v_1(\rho) + v_2(\theta) \tag{4.18}$$

wobei

$$\rho = \log|x| \quad \text{und} \quad \theta = (\theta_1,..,\theta_{n-1}) \tag{4.19}$$

lokale Koordinaten auf der (n-1)-dimensionalen Einheitskugel S^{n-1} sind, sich der infinitesimale Operator (vgl. (5.1)-(5.2))

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j \frac{d}{dx_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C(x)\frac{d^2}{dx_i dx_j} \tag{4.20}$$

in folgender Form schreiben läßt:

$$(4.21) \qquad Lu(x) = L_0 v + Q(x)\frac{dv_1}{d\rho} + \frac{1}{2} R(\theta)\frac{d^2 v_2}{d\theta^2}$$

wobei gilt

$$(4.22) \qquad Q(x) = (\sum a_{ij}x_i x_j + \frac{1}{2}\sum c_{ii}(x) - \sum \frac{c_{ij}(x)x_i x_j}{|x|^2})(|x|^{-2})$$

und

$$(4.23) \qquad R(\theta) = \frac{c_{ij}(x)x_i x_j}{|x|^4} \quad .$$

L_0 ist ein nicht-degenerierter elliptischer Differentialoperator auf dem Raum der zweifach stetig differenzierbaren Funktionen auf S^{n-1} und hat die Form

$$(4.24) \qquad L_0 = \sum d_\lambda \frac{d}{d\theta_\lambda} + \sum e_{\lambda\mu} \frac{d^2}{d\theta_\lambda d\theta_\mu}$$

mit

$$(4.25) \qquad d_\lambda = \sum a_i \frac{d\theta_\lambda}{dx_i}$$

und

$$(4.26) \qquad e_{\lambda\mu} = \sum c_{ij} \frac{d\theta_\lambda}{dx_i} \frac{d\theta_\mu}{dx_j} \quad .$$

Dieser Operator L_0 spielt eine wesentliche Rolle bei der Konstruktion geeigneter Ljapunov- bzw. S-Funktionen.

Zunächst folgt mit dem Maximum-Prinzip:

$$(4.27) \qquad L_0 h = 0 \quad \rightarrow \quad h = \text{konstant} \; .$$

Daraus folgt, daß der Eigenraum zu 0 des adjungierten Operators L_0^* von einer Funktion h_0 aufgespannt wird. Wir normieren h_0 so, daß es ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf S^{n-1}

ist und können nun feststellen, daß h_0 das - wegen der Nicht-Degeneriertheit der Diffusionsmatrix - existierende invariante Maß desjenigen Markov-Prozesses ist, den wir durch die Projektion der Lösung x(t) auf die (n-1)-dimensionale Einheitskugel S^{n-1} erhalten.

Außerdem gilt folgende Beziehung zwischen der Wachstumsrate des Prozesses x(t), h_0 und Q :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log|x(t)|}{t} = q_0 = \int_{S^{n-1}} Q(\theta) h_0(d\theta) \tag{4.28}$$

oder anders ausgedrückt: bezüglich des in (4.28) rechts definierten Skalarproduktes ist $-Q+q_0$ orthogonal zu h_0 :

$$\int_{S^{n-1}} (-Q(\theta)+q_0) h_0(d\theta) = 0 \quad . \tag{4.29}$$

Damit existiert - wegen der für L_0 geltenden Fredholm-Alternative - für die Gleichung

$$L_0 g = -Q + q_0 \tag{4.30}$$

auf S^{n-1} eine Lösung g.

Mit diesen Vorbereitungen gilt dann:

Satz 4.3.:

Unter der Voraussetzung (2.21) der Nicht-Degeneriertheit der Diffusionsmatrix C(x) gilt:
Ist die stochastische Differentialgleichung (4.3) im Nullpunkt asymptotisch stabil m.W.1, dann ist

$$f(x) = \log|x| + g(\theta) \tag{4.31}$$

eine S-Funktion für (4.3), wobei g die (eindeutige) Lösung der Gleichung (4.30) ist.

Beweis:
s. Pinsky(1), S.320f.

Unter Benutzung von Lemma 4.1. erhalten wir dann:

Korollar 4.1.:

Ist die stochastische Differentialgleichung (4.3) im Nullpunkt asymptotisch stabil m.W.1, dann existiert eine Ljapunov-Funktion der Form

$$V(x) = |x|^k \exp(kg(\theta)) \tag{4.32}$$

wobei k eine positive Konstante und g Lösung der Gleichung (4.30) ist.

Arnold/Wihstutz(1) zeigen, daß die Wachstumsrate q_0 unabhängig von der gewählten Norm ist:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log(x(t)^T x(t))^{1/2}}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log(x(t)^T Px(t))^{1/2}}{t} \tag{4.33}$$

wobei P eine positiv-definite symmetrische Matrix ist.

Wir können also den Prozeß nicht nur auf die Einheitskugel S^{n-1}, sondern auch auf ein Ellipsoid $\{x: (x^TPx)^{1/2} = 1\}$ projezieren, ohne daß sich die bisherige Argumentation in ihrer Gültigkeit verändern würde.

D.h.: aus dem Korollar 4.1. erhalten wir dann die möglichen Ljapunov-Funktionen

$$V(x) = (x^TPx)^{k/2} \exp\left(kg\left(\frac{x}{(x^TPx)^{1/2}}\right)\right) \quad . \tag{4.34}$$

Das Ziel sollte also sein, die Matrix P so zu wählen, daß die Funktion g, die homogen vom Grade Null ist und von dem Differentialoperator L_0 (jetzt auf dem Ellipsoid) abhängt, eine möglichst einfache Gestalt annimmt.

Die Bedingung (2.21) können wir in einem bestimmten Fall abschwächen, wenn nämlich die stochastische Differentialgleichung auf einer Hyperebene zu einem stochastischen Differentialgleichungssystem in (n-1) Variablen degeneriert. Ist dann dieses reduzierte System asymptotisch stabil m.W.1 und das ursprüngliche System konvergiert gegen diese Hyperebene, dann ist das gesamte System asymptotisch stabil m.W.1. Es muß also gelten:

Sei für $(x_1,..,x_{n-1},y)$ mit $x = (x_1,..,x_{n-1})$

(4.35) $$dx_i = \sigma_{is}(x,y)dw_s + a_i(x,y)dt$$

$$dy = \sigma_{Os}(x,y)dw_s + a_O(x,y)dt$$

gegeben, wobei

(4.36) $$\sigma_{Os}(x,O) = a_O(x,O) = O \quad .$$

Außerdem gelte für die Hyperebene die Stabilitätsbedingung

(4.37) $$\frac{db_O}{dy}(O,O) - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{d\sigma_{Os}}{dy}(O,O)\right)^2 = -c_1 < O$$

und für das reduzierte System, für das der Nullpunkt natürlich Gleichgewichtspunkt sein muß, existiere eine S-Funktion der Form (4.31) f_1.

Satz 4.4.:

Unter den oben genannten Bedingungen existiert eine S-Funktion für das gesamte System (4.30) der Form

(4.38) $$f_2(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j \log(y^2 + \varepsilon_j \exp(2f_1(x)))$$

mit geeigneten Konstanten α_j, ε_j.

Beweis:

s. Pinsky(1), S.325f.

Aus dem Beweis dieses Satzes geht hervor, daß die S-Funktion $f_2(x,y)$ "im wesentlichen" die Gestalt

$$f_2(x,y) = \log(y^2 + |x|^2 \exp(g(\theta))) \tag{4.39}$$

hat.
Wegen der geforderten zweifachen stetigen Differenzierbarkeit der Ljapunov-Funktionen (mit eventueller Ausnahme des Nullpunktes) können wir bei der "Erweiterung" der Ljapunov-Funktion nicht einfach an die existierende Ljapunov-Funktion eine Potenz von y^2 "anhängen", sondern müssen eine entsprechende Potenz einer positiv-definiten quadratischen Form, z.B. $V_2(x) = (x^T P_2 x)^{k/2}$ mit

$$P_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & & 0 \\ 0 & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

addieren.
Damit erweitert sich die Klasse der benötigten Ljapunov-Funktionen auf Summen von Potenzen von positiv-definiten quadratischen Formen mit den entsprechenden Funktionen g_i:

$$V(x) = \sum_{i \in I} K_i (x^T P_i x)^{k/2} \exp(g_i(\theta)) \quad . \tag{4.41}$$

Bemerkung:
Betrachten wir den Spezialfall aus Satz 4.3. unter dem Gesichtspunkt, daß unter der Bedingung (4.10) sich die Matrizen A, $C_1,..,C_m$ simultan triangularisieren lassen, dann können wir dieses äquivalente System schrittweise jeweils um eine Dimension reduzieren. Fassen wir die dabei auftretenden Stabilitätsbedingungen für die jeweiligen Hyperebenen (4.37) zusammen, so ergibt sich die Matrixgleichung (iii).
(Zur Triangularisierbarkeit s. Bellman(1),S.56)

5. Die definite Zerlegung des Diffusionsterms in LV(x)

Der zur stochastischen Differentialgleichung (4.3) gehörende infinitesimale Operator hat die Form

$$(5.1) \qquad L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j \frac{d}{dx_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} C(x) \frac{d^2}{dx_i dx_j}$$

wobei die Matrix C(x) die Gestalt

$$(5.2) \qquad C(x) = \sum_{r=1}^{m} (C_r x)(C_r x)^T$$

hat.

Da wir uns mit der Klasse von Ljapunov-Funktionen beschäftigen wollen, die aus Summen von Potenzen von positiv-definiten quadratischen Formen besteht, und sich der Operator L linear verhält, können wir ihn auf die Ljapunov-Funktion

$$(5.3) \qquad V(x) = (x^T P x)^{\alpha}$$

anwenden, wobei P eine positiv-definite symmetrische Matrix ist. Wir erhalten - wie Khasminskii(1), S.203 -

$$(5.4) \qquad LV(x) = \alpha(x^T Px)^{\alpha-1}\{x^T(PA + A^T P + \sum_{r=1}^{m} C_r^T P C_r)x + 2(\alpha-1)\,\mathrm{Spur}\, C(x)F(x)\}$$

wobei F(x) eine n×n-Matrix der Gestalt

$$(5.5) \qquad F(x) = -\frac{(Px)(Px)^T}{x^T Px}$$

ist.

Der grundlegende Gedanke ist nun, die in (5.4) durch die Diffusion verursachten Summanden neu zusammenzufassen. Dieser Schritt geht über die von Khasminskii gegebene Darstellung hinaus und gibt uns die Möglichkeit, die verschiedenen qualitativen Anteile der Diffusion zu erfassen.

Wir formen (5.4) noch einmal mithilfe von (5.2) um:

$$LV(x) = \alpha(x^T Px)^{\alpha-1}\{x^T(PA + A^T P)x + \text{Spur } C(x)\cdot(P + 2(\alpha-1)F(x))\} \tag{5.6}$$

Im folgenden betrachten wir ein Element der Matrix $P + 2(\alpha-1)F(x)$ genauer und bringen es durch eine geeignete Partialbruchzerlegung in eine für uns vorteilhaftere Form. Für das i,j-te Element dieser Matrix können wir schreiben

$$p_{ij} + 2(\alpha-1)\frac{\sum_{k=1}^{n} p_{jk}x_k \sum_{k=1}^{n} p_{ik}x_k}{x^T Px} \tag{5.7}$$

Wir wandeln den Bruchterm um:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} p_{jk}x_k \sum_{k=1}^{n} p_{ik}x_k}{x^T Px} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} p_{kj}x_k}{x^T Px} \tag{5.8}$$

$$= \frac{(p_{ij}x_j + \sum_{k\neq j} p_{ik}x_k)(p_{ij}x_i + \sum_{k\neq i} p_{kj}x_k)}{\sum_{k,l=1}^{n} p_{kl}x_k x_l}$$

$$= \frac{p_{ij}^2 x_i x_j + p_{ij}x_j \sum_{k\neq i} p_{kj}x_k + p_{ij}x_i \sum_{k\neq j} p_{ik}x_k + \sum_{k\neq i} p_{kj}x_k \sum_{k\neq j} p_{ik}x_k}{p_{ij}x_i x_j + \sum_{(k,l)\neq(i,j)} p_{kl}x_k x_l}$$

Nach der Durchführung der Division ergibt dies:

$$(5.9)\quad \frac{p_{ij}x_j\sum_{k\neq i}p_{kj}x_k+p_{ij}x_i\sum_{k\neq j}p_{ik}x_k+\sum_{k\neq i}p_{kj}x_k\sum_{k\neq j}p_{ik}x_k}{\sum_{k,l=1}^{n}p_{kl}x_kx_l}$$

$$-\frac{p_{ij}\sum_{(k,l)\neq(i,j)}p_{kl}x_kx_l}{\sum_{k,l=1}^{n}p_{kl}x_kx_l}+p_{ij}$$

$$=p_{ij}+\frac{p_{ij}\left(\sum_{k\neq i}p_{kj}x_kx_j+\sum_{k\neq j}p_{ik}x_ix_k-\sum_{(k,l)\neq(i,j)}p_{kl}x_kx_l\right)}{x^TPx}$$

$$+\frac{\sum_{k\neq i}p_{kj}x_j\sum_{k\neq j}p_{ik}x_k}{x^TPx}$$

$$=p_{ij}+\frac{\sum_{k\neq i}p_{kj}x_k\sum_{k\neq j}p_{ik}x_k-p_{ij}\sum_{k\neq i,l\neq j}p_{kl}x_kx_l}{x^TPx}$$

Zusammenfassend erhalten wir für das i,j-te Element

$$(5.10)\quad (2\alpha-1)p_{ij}+2(\alpha-1)\frac{\sum_{k\neq i}p_{kj}x_k\sum_{k\neq j}p_{ik}x_k-p_{ij}\sum_{k\neq i,l\neq j}p_{kl}x_kx_l}{x^TPx}$$

und damit für (5.6)

$$(5.11)\quad LV(x)=\alpha(x^TPx)^{\alpha-1}\{x^T(PA+A^TP+(2\alpha-1)\sum_{r=1}^{m}C_r^TPC_r)x$$

$$-2(\alpha-1)\,\mathrm{Spur}\,C(x)F'(x)\}$$

wobei die Elemente von F'(x) die folgende Gestalt haben:

$$(5.12)\quad \frac{p_{ij}\sum_{k\neq i,l\neq j}p_{kl}x_kx_l-\sum_{k\neq i}p_{kj}x_k\sum_{k\neq j}p_{ik}x_k}{x^TPx}$$

Allgemein gilt für positiv-semi-definite symmetrische Matrizen D_1 und D_2 die Ungleichung

$$\lambda_{min}^{D_1} \mathrm{Spur} D_2 \leq \mathrm{Spur} D_1 D_2 \leq \lambda_{max}^{D_1} \mathrm{Spur}\, D_2 \tag{5.13}$$

sowie für Vektoren x und y

$$(y^T D_1 x)^2 \leq (y^T D_1 y)(x^T D_1 x) \quad . \tag{5.14}$$

Benutzen wir (5.14) mit y = (0,..,0,1,0,..,0) - dem i-ten Einheitsvektor - und $x = (x_1,..,x_{i-1},0,x_{i+1},..,x_n)$, so ist

$$\mathrm{Spur} F'(x) = \sum_{i=1}^{n} (p_{ii} \sum_{l \neq i} p_{kl} x_k x_l - (\sum_{k \neq i} p_{ki} x_k)^2)(x^T P x)^{-1}) \geq 0 \tag{5.15}$$

und damit wegen (5.13)

$$\mathrm{Spur}\, C(x) F'(x) \geq 0 \quad . \tag{5.16}$$

Damit ist es uns also gelungen, den durch die Diffusion verursachten Summanden des infinitesimalen Operators in einen negativ-semi-definiten und einen positiv-semi-definiten Anteil aufzuspalten für genügend kleines α. Entsprechend der Wirkung dieser Anteile bei der Verwendung der Ljapunov-Sätze können wir damit den stabilisierenden bzw. destabilisierenden Anteil der Diffusion trennen. Dies war bei der bisherigen Darstellung durch Khasminskii nicht möglich.
Stellen wir LV(x) dar als

$$LV(x) = \alpha (x^T P x)^{\alpha - 1} \Omega(x) \tag{5.17}$$

so erhalten wir das Stabilitätskriterium

$$\Omega(x) < 0 \qquad \text{für } x \in U(0),\ x \neq 0. \tag{5.18}$$

Zur Feststellung des Instabilitätsbereiches können wir mit Satz 2.3. die Hilfsfunktion

$$W(x) = -\ln(x^T P x) \tag{5.19}$$

benutzen und erhalten nach einer völlig analogen Rechnung

$$LW(x) = -(x^T P x)^{-1} \{x^T (PA + A^T P - \sum_{r=1}^{m} C_r^T P C_r) x + 2 \text{ Spur } C(x)\Phi'(x) \} \tag{5.20}$$

Stellen wir LW(x) entsprechend (5.17) dar, so erhalten wir

$$LW(x) = -(x^T P x)^{-1} \Phi(x) \tag{5.21}$$

so erhalten wir das Instabilitätskriterium

$$\Phi(x) > 0 \text{ für } x \in U(0),\ x \neq 0. \tag{5.22}$$

Bemerkung:
Friedman/Pinsky(1) zeigen, daß aus

$$\Phi(x) < 0 \quad \text{für } x \in U(0),\ x \neq 0\ , \tag{5.23}$$

die asymptotische Stabilität m.W.1 folgt. Sie verwenden allerdings ausschließlich die n-dimensionale Einheitsmatrix.

Damit liegt das Hauptresultat dieser Arbeit - nämlich die Darstellung des infinitesimalen Operators in (5.11) - vor.
Wir werden insbesondere im Kapitel 10 die Vorteile dieser Darstellung, die eine qualitative Deutung der einzelnen Diffusionsbestandteile zuläßt, ausnutzen, um die Stabilisierung eines deterministischen instabilen Systems mithilfe von stochastischen Störtermen (unter bestimmten Bedingungen) zu zeigen.

6. Einfache n-dimensionale stochastische Differentialgleichungen

Ein triviales Ergebnis der Zerlegung (5.11) ist das

Korollar 6.1.:
Aus der Stabilität im Mittel der stochastischen Differentialgleichung (4.3) folgt die Stabilität des Erwartungswertes dieser Gleichung.

Beweis:
Setze in (5.11) $\alpha = \frac{1}{2}$.

Setzen wir $\alpha = 1$, so erhalten wir den schon bei Arnold(1), S.205, aufgeführten

Satz 6.1.:
Für die asymptotische Stabilität im Quadratmittel ist notwendig, daß für jede, und hinreichend, daß für irgendeine symmetrische positiv-definite Matrix D die Matrixgleichung

$$PA + A^T P + \sum_{r=1}^{m} C_r^T P C_r = -D \tag{6.1}$$

eine symmetrische positiv-definite Lösung P besitzt.

Mit der Zerlegung (5.11) des infinitesimalen Operators können wir sofort einen einfachen Sonderfall untersuchen: Sei in (4.3) m = 1 und

$$C = \sigma I \tag{6.2}$$

Dann hat die Matrix C(x) die Gestalt

(6.3) $$C(x) = \sigma^2 (x_i x_j)_{ij}$$

Setzen wir P = I, so erhalten wir

(6.4) $$\text{Spur } C(x)F'(x) = \sigma^2 \text{Spur } (x_i x_j)_{ij} F'(x)$$

$$= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 \sum_{k \neq i} x_k^2 - x_i^2 \sum_{k \neq i} x_k^2)(x^T x)^{-1}$$

$$= 0 \quad .$$

Damit ist

(6.5) $$\Omega(x) = x^T (A + A^T + (2\alpha - 1)\sigma^2 I)x$$

und wir erhalten für $\alpha \to 0$:

Hat in (4.3) die Matrix C die Gestalt $C = \sigma I$, so ist diese lineare stochastische Differentialgleichung im Nullpunkt asymptotisch stabil m.W.1, falls die Realteile der Eigenwerte von A nicht größer sind als die Hälfte der "Intensität" σ^2 der Diffusion:

(6.6) $$\text{Re } \lambda_i^A < \frac{\sigma^2}{2} \qquad \text{für } i=1,..,n \ .$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem von Willems(1) überein, der dieses Resultat unter Benutzung der Kommutativität der auftretenden Matrizen erhält.(vgl. auch Satz 4.3.). In diesem Fall kann auch die explizite Lösung der stochastischen Differentialgleichung angegeben werden und aus dieser Darstellung das qualitative Verhalten der Lösung abgelesen werden (s. Arnold(1), S.156).

Mithilfe des Stabilitätskriteriums (5.18) können wir relativ einfach zu bestimmende Bedingungen für die asymptotische Stabilität m.W.1 formulieren, indem wir $\Omega(x)$ abschätzen.
Einen ersten Schritt dazu macht Khasminskii(1), S.203f.
Mit den Bezeichnungen

$$m = \inf_{|x|=1} \lambda_{min}^{C(x)} \tag{6.7}$$

und

$$M = \max_{|x|=1} \lambda_{max}^{C(x)} \tag{6.8}$$

erhält er für kleines α folgende Abschätzung für $\Omega(x)$:

$$\Omega(x) \leqq x^T(\lambda_{max}^{PA+A^TP} + (2\alpha-1)\lambda_{min}^{P} m + 2MSpurP)x \tag{6.9}$$

Dabei fällt auf, daß insbesondere für degeneriertes C(x) - d.h. m = 0 - der gesamte Vorteil, der durch die Potenzierung der quadratischen Form mit α erzielt wird, wegfällt.
Dieses wird vermieden, wenn wir die von uns bestimmte Darstellung (5.11) benutzen und diese mit Eigenwerten abschätzen:

$$\Omega(x) \leqq x^T(\lambda_{max}^{Q} -2(\alpha-1)MSpurF)x \tag{6.10}$$

wobei $$Q = PA + A^TP + (2\alpha-1) \sum_{r=1}^{m} C_r^T P C_r$$

ist. Damit ist also die Abschätzung (6.10) besser als (6.9) geeignet, Stabilitätsschranken der stochastischen Differentialgleichung (4.3) - insbesondere für degeneriertes C(x) - festzustellen.

Für ein sehr einfach konstruiertes System mit isotropem Rauschen erhalten wir mithilfe dieser Abschätzung - die in diesem Falle mit der von Khasminskii zusammenfällt - hinreichende und notwendige Bedingungen für asymptotische Stabilität.
Es sei

$$dx_i = a_i x_i dt + \sigma \sum_{j=1}^{1} x_i dw_{i-1+1+j} \quad , \; i = 1,..,n \tag{6.11}$$

d.h. die j-te Störmatrix der i-ten Komponente hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Zeile}$$

$$\uparrow$$

j-te Spalte

wobei

$$A + A^T = -\lambda I \tag{6.12}$$

sei. Dann ist

$$C(x) = \sigma^2 |x|^2 I \tag{6.13}$$

also

$$M = m = \sigma^2 \tag{6.14}$$

Wir setzen P = I und erhalten das Stabilitätskriterium

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2(n-2+2\alpha) < \lambda \quad . \tag{6.15}$$

Hieraus lesen wir ab, daß für das obige System mit $n < 3$ eine Destabilisierung mit den angegebenen Störtermen nicht möglich ist, da wir zu jedem σ^2 ein genügend kleines α angeben können, so daß das Stabilitätskriterium (6.15) erfüllt ist.
(s. auch ähnliche Beispiele bei Khasminskii(1),(2) und Arnold(1)).

Mit dem Instabilitätskriterium (5.22) sehen wir dann - nach völlig analoger Rechnung - daß das Kriterium (6.15) hinreichend und notwendig für asymptotitsche Stabilität m.W.1 ist (für $\alpha \to 0$).

Schon komplizierter gestaltet sich die Stabilitätsanalyse einer weiteren relativ einfach konstruierten n-dimensionalen stochastischen Differentialgleichung.
Sei

$$dx_i = a_i x_i dt + c_i x_i dw \qquad , i = 1,..,n \tag{6.16}$$

gegeben.
In diesem Falle benutzen wir als Hilfsfunktion eine Summe von Potenzen positiv-definiter quadratischer Formen:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} (x^T P_i x)^{\alpha} \tag{6.17}$$

wobei für die Matrizen P_i gilt:

$$P_i = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & \varepsilon & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \\ & & & & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \leftarrow \text{i-te Zeile} \tag{6.18}$$

Dann gilt für die i-te Komponente des infinitesimalen Operators bzw. für das i-te Stabilitätskriterium

$$\Omega_i(x) < x_i^2(2a_i + (2\alpha-1)c_i^2) + \varepsilon K_I x^T x \tag{6.19}$$

für eine bestimmte Konstante K_i.
Damit erhalten wir:

Die stochastische Differentialgleichung (6.16) ist asymptotisch stabil m.W.1, wenn

$$a_i < \frac{1}{2} c_i^2 \qquad \text{für } i = 1,..,n. \tag{6.20}$$

Wir können das System (6.16) natürlich auch mit Satz 4.4. von Pinsky(1) untersuchen, indem wir es schrittweise jeweils um eine Dimension reduzieren.
Wie man sofort sieht, sind dann die Stabilitätsbedingungen für die jeweiligen Hyperebenen identisch mit den Stabilitätsbedingungen (6.20).

Bemerkung:

Ein Ansatz von Willems(3), S.81, mit einer Hilfsfunktion der Form

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i (x^T x)^{\alpha} \tag{6.21}$$

führt nicht zum Ergebnis (6.20), obwohl dies von Willems(3) behauptet wird.

7. Die gestörte lineare Gleichung n-ter Ordnung

Eine der bisher am häufigsten untersuchten stochastischen Differentialgleichungen ist die gestörte lineare Gleichung n-ter Ordnung

$$dx_1 = x_2 dt \quad ; \quad dx_2 = x_3 dt \quad ;..; \quad dx_{n-1} = x_n dt \tag{7.1}$$

$$dx_n = -\sum_{i=1}^{n} b_i x_{n-i+1} dt - \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_{n-i+1} dw_j$$

mit dem infinitesimalen Operator

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} \frac{d}{dx_i} - \sum_{i=1}^{n} b_i x_{n-i+1} \frac{d}{dx_n} \tag{7.2}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_{n-i+1} x_{n-j+1} \frac{d^2}{dx_n^2}$$

wobei

$$a_{ij} = \sigma_{ij}\sigma_{ji} \tag{7.3}$$

ist.
Für dieses stochastische System entwickelten Nevelson/Khasminskii(1) den Routh-Hurwitz-Bedingungen analoge Kriterien für die Quadrat-Mittel-Stabilität der Ruhelage:

Satz 7.1.:

Die Ruhelage von (7.1) ist asymptotisch stabil im Quadratmittel genau dann, wenn gilt:
Die Routh-Hurwitz-Determinanten der ungestörten Gleichung sind positiv und

$$\Delta_n > \Delta/2 \tag{7.4}$$

wobei

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & \dots & 0 \\ 1 & b_2 & b_4 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ 0 & \dots & & \dots & b_n \end{vmatrix} \tag{7.5}$$

und

$$\Delta = \begin{vmatrix} q_{nn}^{(0)} & q_{nn}^{(1)} & q_{nn}^{(2)} & \dots & q_{nn}^{(n-1)} \\ 1 & b_2 & b_4 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & & \dots & b_n \end{vmatrix} \tag{7.6}$$

mit

$$q_{nn}^{(n-k-1)} = \sum_{i+j=2(n-k)} c_{ij}(x)(-1)^{j+1} \tag{7.7}$$

Beweis:

s. z.B.: Khasminskii(1)

Um weniger konservative und für die Praxis relevante Stabilitätskriterien für die asymptotische Stabilität m.W.1 zu erhalten, verwenden wir die Ljapunov-Methode und die von uns entwickelte Partialbruchzerlegung. Mit der Hilfsfunktion (5.3) erhalten wir mit (7.2):

$$LV(x) = \alpha(x^T P x)^{\alpha-1}\{ 2\sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j - 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_{n-i+1} \sum_{j=1}^{n} p_{nj}x_j \tag{7.8}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_{n-i+1}x_{n-j+1}\{(2\alpha-1)p_{nn} - 2(\alpha-1)\frac{p_{nn}\sum_{i,j=1}^{n-1} p_{ij}x_i x_j - (\sum_{j=1}^{n-1} p_{nj}x_j)^2}{x^T P x}\}$$

Wie man leicht sieht, ist der Diffusionsterm in (7.8) gleich

$$p_{nn} - \frac{(\sum_{j=1}^{n} p_{nj}x_j)^2}{x^T P x}$$

und wird genau dann maximal, wenn

$$\sum_{j=1}^{n} p_{nj}x_j = 0 \tag{7.9}$$

ist.
Wir müssen also diese Hyperebene so legen, daß der Diffusionsterm durch den deterministischen Anteil

$$PA + A^T P \tag{7.10}$$

im Verlauf dieser Hyperebene möglichst "gemildert" wird.

Eine Möglichkeit dazu besteht darin, den Quotienten zweier quadratischer Formen durch die Lösungen einer bestimmten Gleichung abzuschätzen.
Es ist

$$\lambda_1 \leq \frac{x^T R x}{x^T S x} \leq \lambda_n \tag{7.11}$$

wobei R eine symmetrische und S eine positiv-definite Matrix und $\lambda_1 \leq .. \leq \lambda_n$ die Wurzeln von $|R - \lambda S| = 0$ sind.

Setzen wir nun $R = (a_{ij})$ und $S = P$, so können wir den Bruchterm innerhalb der geschwiften Klammern aus (7.8) abschätzen und erhalten das Stabilitätskriterium

$$\begin{aligned} \Omega(x) \leq (&2\sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j - 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_{n-i+1} \sum_{j=1}^{n} p_{nj}x_j \\ &+ (2\alpha-1)p_{nn} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_{n-i+1}x_{n-j+1} \\ &- 2(\alpha-1)\lambda_n(p_{nn}\sum_{i,j=1}^{n-1} p_{ij}x_i x_j - (\sum_{j=1}^{n-1} p_{nj}x_j)^2)) < 0 \end{aligned} \tag{7.12}$$

Wie man sofort sieht, verbessert diese Abschätzung die von Nevelson/Khasminskii(1) angegebenen Quadratmittel-Stabilitätsbedingungen.
Denn wir erhalten gerade diese Bedingungen, wenn wir in (7.12) $\alpha = 1$ setzen.

Wir können also wiederum aufgrund der Zerlegung des Diffusionsterms im infinitesimalen Operator auch für höherdimensionale Systeme der Familie (7.1) - selbst bei degenerierter Diffusionsmatrix - bessere Resultate erzielen und näher an die Grenzen des Stabilitätsbereichs von (7.1) gelangen.

8. Die zweidimensionale lineare stochastische Differentialgleichung

Wir untersuchen nun die zweidimensionale lineare stochastische Differentialgleichung

$$dz = Azdt + Czdw \quad ; \quad z(0) = z_0 = \text{const.} \tag{8.1}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

und

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

reellwertige Matrizen sind und $z = (x,y)^T$.
Die Gleichung (8.1) hat den zugehörigen infinitesimalen Operator

$$\begin{aligned} L = {} & (a_1x + a_2y)\frac{d}{dx} + (a_3x + a_4y)\frac{d}{dy} \\ & + \frac{1}{2}\{(c_1x + c_2y)^2 \frac{d^2}{dx^2} \\ & + 2(c_1x + c_2y)(c_3x + c_4y) \frac{d^2}{dxdy} + (c_3x + c_4y)^2 \frac{d^2}{dy^2}\} \end{aligned} \tag{8.4}$$

Ziel soll es sein, möglichst einfach zu bestimmende Stabilitäts- bzw. Instabilitätskriterien zu formulieren, um damit die bisher mit der Ljapunov-Methode bestimmten Stabilitätskriterien zu verbessern.

Verwenden wir wieder als Hilfsfunktion die Potenz einer positiv-definiten quadratischen Form

$$V(z) = V(x,y) = (z^T P z)^{\alpha} \tag{8.5}$$

$$= (p_1 x^2 + 2p_2 xy + p_3 y^2) \quad , 0<\alpha\leq 1,$$

so erhalten wir mit (8.4) und (8.5) mit den Abkürzungen

$$b_1 = b_1(x,y) = (c_1 x + c_2 y) \tag{8.6}$$

$$b_2 = b_2(x,y) = (c_3 x + c_4 y) \tag{8.7}$$

nach der durchgeführten Partialbruchzerlegung und einigen einfachen Umformungen

$$LV(x,y) = \alpha(z^T Pz)^{\alpha-1}\{z^T(PA + A^T P + (2\alpha-1)C^T PC)z \tag{8.8}$$

$$- 2(\alpha-1)(p_1 p_3 - p_2^2)\frac{y^2 b_1^2 - 2xyb_1 b_2 + x^2 b_2^2}{z^T Pz}\}$$

Mit einer reellen, regulären 2×2-Matrix U transformieren wir mit

$$z' = Uz \tag{8.9}$$

die Gleichung (8.1) in die stochastische Differentialgleichung

$$dz' = (UAU^{-1})z'dt + (UCU^{-1})z'dw \tag{8.10}$$

und können damit erreichen, daß die transformierte Matrix UCU^{-1} eine der folgenden Matrizen ist:

(8.11) $$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad ;$$

(8.12) $$\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \quad , c_1 \neq c_2 \quad ;$$

(8.13) $$\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \quad , c_2 \neq 0 \quad ;$$

(8.14) $$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{pmatrix} \quad , c_2 \neq 0 \quad .$$

Wir können uns also auf die Stabilitätsuntersuchung dieser vier Formen der Matrix C beschränken und im folgenden durch Eigenwertabschätzungen Stabilitäts- bzw. Instabilitätskriterien angeben.

8.1.

Hat die Matrix C die Gestalt (8.11), so haben wir den Spezialfall (6.2) und erhalten natürlich die Stabilitätsbedingungen (6.6).

8.2.

Ist die Matrix C von der Form (8.12), dann hat (8.8) die Gestalt

(8.15) $$LV(x,y) = \alpha(z^T Pz)^{\alpha-1}\{ z^T(PA + A^T P + (2\alpha-1)C^T PC)z - 2(\alpha-1)(p_1p_3-p_2^2)\frac{x^2y^2(c_1 - c_2)^2}{z^T Pz}\}$$

wobei

$$C^T PC = \begin{pmatrix} p_1 c_1^2 & p_2 c_1 c_2 \\ p_2 c_1 c_2 & p_3 c_2^2 \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

Mit den Abschätzungen

$$\lambda_{min}^P \leq (p_1 p_3 - p_2^2) \frac{x^2+y^2}{z^T Pz} \leq \lambda_{max}^P \tag{8.17}$$

sowie

$$\frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|xy| \tag{8.18}$$

ist dann

$$\Omega(z) \leq z^T (PA + A^T P + (2\alpha-1) C^T PC) z - (\alpha-1) \lambda_{max}^P |xy| (c_1-c_2)^2 \tag{8.19}$$

8.3

Hat C die Form (8.13), dann ist

$$LV(x,y) = \alpha (z^T Pz)^{\alpha-1} \{ z^T (PA + A^T P + (2\alpha-1) C^T PC) z - 2(\alpha-1)(p_1 p_3 - p_2^2) \frac{c_2^2 x^4}{z^T Pz} \} \tag{8.20}$$

wobei hier

$$C^T PC = \begin{pmatrix} p_1 c_1^2 + 2 p_2 c_1 c_2 + p_3 c_2^2 & p_2 c_1^2 + p_3 c_1 c_2 \\ p_2 c_1^2 + p_3 c_1 c_2 & p_3 c_1^2 \end{pmatrix} \tag{8.21}$$

Mit (8.17) und der weiteren Abschätzung

(8.22) $$\frac{x^4}{x^2+y^2} \geq x^2 - \frac{1}{2}|xy|$$

erhalten wir für $\Phi(x)$ die Abschätzung

(8.23) $$\Phi(z) \geq z^T(PA + A^TP - C^TPC)z + 2\lambda^P_{min}(x^2 - \tfrac{1}{2}|xy|)c_2^2$$

8.4

Ist schließlich C von der Gestalt (8.14), so ist

(8.24) $$LV(x,y) := \alpha(z^TPz)^{\alpha-1}\{z^T(PA + A^TP + (2\alpha-1)C^TPC)z - 2(\alpha-1)(p_1p_3-p_2^2)\frac{c_2^2(x^2+y^2)^2}{z^TPz}\}$$

mit

(8.25) $$C^TPC = \begin{pmatrix} p_1c_1^2-2p_2c_1c_2+p_3c_2^2 & p_1c_1c_2+p_2(c_1^2-c_2^2)-p_3c_1c_2 \\ p_1c_1c_2+p_2(c_1^2-c_2^2)-p_3c_1c_2 & p_1c_2^2+2p_2c_1c_2+p_3c_1^2 \end{pmatrix}$$

Hier erhalten wir mit (8.17):

(8.26) $$\Omega(z) \leq z^T(PA + A^TP + (2\alpha-1)C^TPC - 2(\alpha-1)c_2^2\lambda^P_{max}I)z$$

und

(8.27) $$\Phi(z) \geq z^T(PA + A^TP - C^TPC + 2\,c_2^2\lambda^P_{min}I)z$$

Setzen wir P = I, so erhalten wir eine besonders anschauliche Darstellung der Wirkung der Diffusion:

(8.28) $$\Omega(z) = z^T(A + A^T + \begin{pmatrix} 2\alpha c_1^2-c_1^2+c_2^2 & 0 \\ 0 & 2\alpha c_1^2-c_1^2+c_2^2 \end{pmatrix})z$$

und

$$\Phi(z) = z^T(A + A^T + \begin{pmatrix} -c_1^2+c_2^2 & 0 \\ 0 & -c_1^2+c_2^2 \end{pmatrix})z \tag{8.29}$$

Die hier aufgeführten Abschätzungen sind natürlich nur eine Auswahl aus den Möglichkeiten. Z.B lassen sich mit der Abschätzung

$$\lambda_1 \leq \frac{x^T R x}{x^T S x} \leq \lambda_n \tag{8.30}$$

wobei R eine symmetrische und S eine positiv-definite Matrix und $\lambda_1 \leq .. \leq \lambda_n$ die Wurzeln von $|R - \lambda S| = 0$ sind, weitere Stabilitätskriterien gewinnen, die über die bisher mit der Ljapunov-Methode gewonnenen Ergebnisse hinausgehen.

9. Vergleiche mit vorhandenen Resultaten für zweidimensionale stochastische Differentialgleichungen

Die Mehrzahl der bisher untersuchten stochastischen Differentialgleichungen ist zweidimensional. Der Grund ist vor allen Dingen darin zu sehen, daß die von Khasminskii angegebenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen durch eine Rückführung auf eindimensionale Diffusionsprozesse in einer bestimmten Integralgestalt geschlossen angegeben werden können (s. Nishioka(1)).
Jedoch ist die Berechnung dieses Integrals nur in sehr wenigen Fällen analytisch möglich, so daß sich die bisherigen Ergebnisse als numerisch bestimmte Kurven darstellen, deren Verlauf mit ähnlichen Kurven verglichen wird. (s. Mitchell/Kozin(1) und Kozin/Prodromou(1)).
Wir zeigen, daß mit unserem Ljapunov-Ansatz und elementaren Rechnungen Ergebnisse erzielen lassen, die qualitativ den numerisch gewonnenen Resultaten entsprechen.

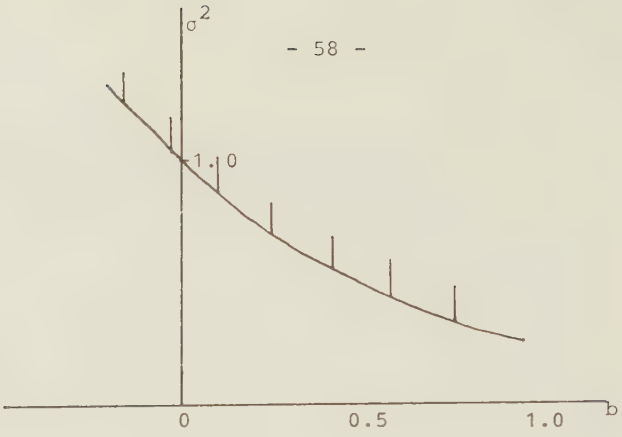
9.1

Als erstes Beispiel nehmen wir einen der wenigen Fälle, bei dem man mithilfe des Khasminskii-Ansatzes über die Rückführung des zu berechnenden Integrals auf Bessel-Funktionen ohne Einsatz numerischer Lösungsmethoden zu exakten Stabilitätsbedingungen kommt.
Kozin/Sugimoto(1) geben für die stochastische Differentialgleichung

$$dz = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2b \end{pmatrix} z\,dt + \begin{pmatrix} \sigma & k \\ -k & \sigma \end{pmatrix} z\,dw \quad ; \; \sigma k = 1 \tag{9.1}$$

folgende Aufteilung des Parameterraumes in einen Stabilitätsbereich und einen Instabilitätsbereich an

(9.2)



Benutzen wir die Ljapunov-Methode mit P = I, so erhalten wir mit (8.28) und (8.29) die gleiche Aufteilung, ohne den Weg über die Auswertung der Bessel-Funktionen gehen zu müssen.
Auch Mitchell(1) untersucht eine Gleichung mit der gleichen Struktur der "Störmatrix", die allerdings hier auf zwei unabhängige Rauschquellen verteilt ist:

$$dz = \begin{pmatrix} a_{11} + \frac{\sigma_1(\sigma_1-\sigma_2)}{2} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + \frac{\sigma_2(\sigma_2-\sigma_1)}{2} \end{pmatrix} z\,dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} z\,dw_1 + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} z\,dw_2 \tag{9.3}$$

Die Koeffizienten der dt-Matrix, die $\sigma_1 > 0$ und $\sigma_2 > 0$ enthalten, sind die Wong-Zakai-Korrektur-Terme, die von Mitchell aufgenommen werden, damit die obige Gleichung auch als Modell für physikalische Systeme mit gauss'schen Weit-Band-Rauschen-Koeffizienten dienen kann. Wir werden darauf noch bei der Behandlung von Fragen der Modellbildung zurückkommen. Mitchell setzt zunächst

$$a_{12} = a_{21} = a \quad \text{und} \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \; . \tag{9.4}$$

Mit unserem Ansatz und P = I erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$\Omega(z) = z^T(A + A^T + 2\alpha\sigma^2 I)z \tag{9.5}$$

und

$$\Phi(z) = z^T(A + A^T)z \tag{9.6}$$

wobei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a \\ a & a_{22} \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

ist.

Damit erhalten wir:

Die stochastische Differentialgleichung (9.3) ist

a) asymptotisch stabil m.W.1, falls

$$a_{11} + a_{22} < 0 \quad \text{und} \quad a_{11}a_{22} - a^2 > 0 \ , \tag{9.8}$$

b) instabil in Wahrscheinlichkeit, falls

$$a_{11} + a_{22} > 0 \quad \text{und} \quad a_{11}a_{22} - a^2 > 0 \ . \tag{9.9}$$

Für den verbleibenden Fall, daß das deterministische System im Nullpunkt einen instabilen Sattelpunkt hat, zitieren wir hier Mitchell(1)

Demnach ist die stochastische Differentialgleichung (9.3)

c) instabil in Wahrscheinlichkeit, falls

(9.10) $\quad a_{11} + a_{22} > 0 \quad$ und $\quad a_{11}a_{22} - a^2 < 0$

für alle möglichen Werte σ^2 ,

d) asymptotisch stabil m.W.1, falls

(9.11) $\quad a_{11} + a_{22} < 0 \quad$ und $\quad a_{11}a_{22} - a^2 < 0$

für genügend große Werte σ^2.

(S. auch das Beispiel (5.5) aus Nevelson/Khasminskii(2)).

D.h.:

Das instabile deterministische Differentialgleichungssystem kann durch einen geeigneten Rauschterm stabilisiert werden, falls der Schwerpunkt des Spektrums in der negativen Hälfte der komplexen Ebene liegt, wobei die Rauschterme "physikalisch realisierbar" sind.

9.2

Mit den Ergebnissen aus (6.16)-(6.20) und deren Übertragung auf den zweidimensionalen Fall können wir die Stabilitätsbedingungen für eine stochastische Differentialgleichung bestimmen, die als Modell für bestimmte ökologische Systeme benutzt wird:

$$\begin{aligned} dx &= (\lambda x - kxy)dt + \sigma x dw \\ dy &= (kxy - my)dt \end{aligned} \tag{9.12}$$

Wir linearisieren in der Umgebung des Nullpunktes und erhalten die lineare stochastische Differentialgleichung

$$\begin{aligned} d(\Delta x) &= \lambda(\Delta x)dt + \sigma(\Delta x)dw \\ d(\Delta y) &= -m(\Delta y)dt \end{aligned} \tag{9.13}$$

Mit den Ungleichungen (6.20) ergibt sich dann folgende Aussage über das qualitative Verhalten:

Die lineare stochastische Differentialgleichung (9.15) - und damit auch die nicht-lineare stochastische Differentialgleichung (9.14) - ist im Nullpunkt asymptotisch stabil m.W.1, falls gilt:

$$\lambda < \frac{\sigma^2}{2} \qquad \text{und} \qquad m > 0 \quad . \tag{9.14}$$

Dieses Resultat stimmt mit dem von Arnold/Horsthemke/Stucki(1) angegebenen Ergebnis überein, das diese durch Integration der stochastischen Differentialgleichung (9.15) und Anwendung des starken Gesetzes der großen Zahlen erhielten.

10. Fragen der Modellbildung

Betrachten wir noch einmal das Resultat (6.6) aus Kapitel 6, so sehen wir, daß es im Ito-Kalkül möglich ist, ein deterministisch instabiles System durch weißes Rauschen genügend großer Intensität der "richtigen" Form im Sinne unserer Stabilitätsdefinitionen zu stabilisieren.
Wir müssen uns also fragen, ob das gewählte Modell des stochastischen Ito-Integrals einen gegebenen physikalischen Prozeß adäquat beschreibt.
Physikalisch realisierbare Prozesse sind jedoch immer "glatte" Prozesse, also bestenfalls approximative Markov-Prozesse. Approximieren wir das weiße Rauschen bzw. den Wiener-Prozeß durch glattere Prozesse, lösen die approximative Gleichung und gehen in der Lösung wieder zum weißen Rauschen bzw. Wiener-Prozeß über, so erhalten wir statt der Ito-Gleichung eine "Stratonovich-Gleichung". (vgl. Arnold(1), S.174f., Sussmann(1)).
Diese unterscheidet sich von der Ito-Gleichung

$$dx = f(x)dt + \sigma(x)dw \tag{10.1}$$

durch einen Korrekturterm, dessen Wirkung wir noch beschreiben werden:

$$dx = \left(f(x) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{x_k}(x)_{.j}\sigma_{kj}(x)\right)dt + \sigma(x)dw \tag{10.2}$$

Hierbei ist $\sigma_{x_k}(x)_{.j}$ die j-te Spalte der n×m-Matrix

$$\sigma_{x_k} = \frac{d}{dx_k}\sigma_{ij} \tag{10.3}$$

Übertragen auf die lineare stochastische Differentialgleichung

$$dx = Axdt + \sum_{r=1}^{m} C_r x dw_r \tag{10.4}$$

ergibt dies die dem Stratonovich-Kalkül äquivalente lineare stochastische Differentialgleichung

$$dx = (Ax + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} C_r' x)dt + \sum_{r=1}^{m} C_r x dw_r \tag{10.5}$$

wobei die einzelnen Summanden C_r' die Gestalt

$$C_r' = C_r^2 \tag{10.6}$$

haben.
Damit ergibt sich aus unserem Beispiel aus Kapitel 6 für $m = 1$, $C = \sigma I$ mit $P = I$ das folgende Stabilitätskriterium:

$$\Omega(x) = x^T(A + A^T + 2\alpha\sigma^2 I)x < 0 \tag{10.7}$$

und damit für $\alpha \to 0$:

Hat die Matrix C die Gestalt $C = \sigma I$, so ist die lineare stochastische Differentialgleichung (10.5) im Nullpunkt asymptotisch stabil m.W.1 (also bzgl. des Stratonovich-Kalküls), falls die Realteile der Eigenwerte von A negativ sind.

Eine Destabilisierung durch Rauschterme der obigen Form ist also nicht möglich, falls man den Stratonovich-Kalkül zugrundelegt, d.h. falls man physikalisch realisierbare Störungen betrachtet.
Um so interessanter ist nun die Frage, ob durch anders

geformte Matrizen C_r im Stratonovich-Kalkül die Stabilisierung eines deterministischen instabilen Systems vorgenommen werden kann.
Zur Beantwortung dieser Frage können wir die von uns durchgeführte definite Zerlegung der Diffusionsanteile im infinitesimalen Operator benutzen.
Für die lineare stochastische Differentialgleichung des Stratonovich-Kalküls (10.5) erhalten wir mit unserem Ljapunov-Ansatz (5.11) und (5.17) das Stabilitätskriterium

$$\Omega(x) = x^T(P(A + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} C_r') + (A + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} C_r')^T P + (2\alpha-1)\sum_{r=1}^{m} C_r^T P C_r)x - 2(\alpha-1)\,\mathrm{Spur}\, C(x)F'(x) < 0 \,. \tag{10.8}$$

Effektiv im Sinne der stabilisierenden Wirkung sind also insbesondere Matrizen, für die sowohl der Korrekturterm

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} C_r' \tag{10.9}$$

als auch der negativ-semi-definite Ausdruck

$$(2\alpha-1)\sum_{r=1}^{m} C_r^T P C_r \tag{10.10}$$

Eigenwerte haben, deren Realteile auf jeden Fall nichtpositiv sind.
Als Kandidaten kommen dann z.B. schiefsymmetrische Matrizen in Betracht, die einzig auf der Nebendiagonalen Elemente enthalten, die von Null verschieden sind:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \sigma_1 \\ \cdot & & \cdot & \sigma_2 \\ & -\sigma_2 & \cdot & \\ -\sigma_1 & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \tag{10.11}$$

Dann ist nämlich

$$C' = C^2 = -\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \sigma_2^2 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \sigma_2^2 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \tag{10.12}$$

und

$$C^T C = -C^2 \quad . \tag{10.13}$$

Schließlich hat die Diffusionsmatrix C(x)-vgl.(5.2)- die Gestalt

$$C(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 x_n^2 & \sigma_1\sigma_2 x_n x_{n-1} & \cdot & \cdot & -\sigma_1\sigma_2 x_n x_2 & -\sigma_1^2 x_n x_1 \\ \sigma_1\sigma_2 x_n x_{n-1} & \sigma_2^2 x_{n-1}^2 & \cdot & \cdot & -\sigma_2^2 x_{n-1} x_2 & -\sigma_1\sigma_2 x_{n-1} x_1 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ -\sigma_1\sigma_2 x_n x_2 & -\sigma_2^2 x_{n-1} x_2 & \cdot & \cdot & \sigma_2^2 x_2^2 & \sigma_1\sigma_2 x_2 x_1 \\ -\sigma_1^2 x_n x_1 & -\sigma_1\sigma_2 x_{n-1} x_1 & \cdot & \cdot & \sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 & \sigma_1^2 x_1^2 \end{pmatrix} \tag{10.14}$$

Für die Untersuchung der Frage der Stabilisierbarkeit eines deterministischen Systems durch physikalisch realisierbare Störungen - also im Stratonovich-Kalkül - nehmen wir nun an, daß die Systemmatrix der deterministischen Differentialgleichung Diagonalgestalt hat:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_2 & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_n \end{pmatrix} \tag{10.15}$$

Außerdem wählen wir als Hilfsmatrix P ebenfalls eine Diagonalmatrix aus, deren Diagonalelemente analog zu (10.15) $p_1,..,p_n$ seien.

Damit können wir sofort einen einfachen Spezialfall untersuchen:

Sei für die stochastische Differentialgleichung (10.5) die Matrix C von der Gestalt (10.11), wobei die von Null verschiedenen Elemente identisch sind.
Setzen wir dann die Matrix P der Einheitsmatrix gleich, so erhalten wir aus (10.8) und m = 1 das Stabilitätskriterium

$$\Omega(x) = x^T((A - \tfrac{1}{2}\sigma^2 I) + (A - \tfrac{1}{2}\sigma^2 I)^T + (2\alpha-1)\sigma^2 I)x - 2(\alpha-1)\sigma^2 x^T x = x^T(A + A^T)x < 0. \tag{10.16}$$

D.h.:

Ein asymptotisch stabiles deterministisches System kann durch stochastische Störungen der obigen Form nicht in seinem qualitativen Verhalten verändert werden. (vgl. auch Willems(3), der dieses Ergebnis mit einem anderen Ansatz - die Kommutativität der beteiligten Matrizen - erhält).

Die Frage nach der Stabilisierung eines instabilen deterministischen Systems durch stochastische Störungen im Stratonovich-Kalkül können wir mit folgendem Satz beantworten:

Satz 10.1.:

Das deterministische Differentialgleichungssystem mit der Systemmatrix (10.15) läßt sich mit Hilfe von höchstens n schiefsymmetrischen Störmatrizen C_i im Sinne des Stratonovich-Kalküls stabilisieren, falls gilt:

$$\text{Spur } A = a_1 + a_2 + .. + a_n < 0 . \tag{10.17}$$

Die schiefsymmetrischen Matrizen haben folgende Gestalt:
Es sei

(10.18) $a_i > 0$ für $i = 1,..,m$, $a_j \leq 0$ für $j = m+1,..,n$

und für jedes i sei $I_i \subset \{m+1,..,n\}$ so gewählt, daß

(10.19) $$a_i + \sum_{j \in I_i} a_j < 0 \quad ;$$

dann sei für alle $i = 1,..,m$ und $j \in I_i$

(10.20) $$(C_{ij})_{k\ell} = \begin{cases} -\sigma & \text{für} \quad (k,\ell) = (j,i) \\ \sigma & \text{für} \quad (k,\ell) = (i,j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad 1 \leq k,\ell \leq n$$

Beweis:

Zum Verständnis der Konstruktion der Matrizen sei z.B.
$i = 1$ und

$$a_1 + a_{m+1} + a_{m+2} < 0$$

Dann haben die Matrizen $(C_{1,m+1})$ und $(C_{1,m+2})$ die Gestalt

(10.21) $$C_{1,m+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & & \vdots \\ -\sigma & 0 & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{m+1-te Zeile}$$

und

$$(10.22)\qquad C_{1,m+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ -\sigma & 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{m+2-te Zeile}$$

Bedingung für die asymptotische Stabilität m.W.1 ist, daß die Wachstumsrate der Lösung x(t) negativ ist:

$$(4.12)\qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\log|x(t)|}{t} < 0 \qquad \text{m.W.1} \quad .$$

Nun ist nach dem Satz von Ito (1.7), mit der Darstellung (10.8) und $L(\log|x|) = \frac{1}{2}(x^T x)^{-1}\Omega(x)$, wobei in $\Omega(x)$ $\alpha \to 0$ ist, -vgl. auch (5.19) - (5.22)-

$$(10.23)\qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\log|x(t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[\int_0^t L(\log|x(s)|)ds\right]$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\int_0^t \frac{x(s)^T((A+\sum C_{ij}^2)+(A+\sum C_{ij}^2)^T-\sum(C_{ij}^T C_{ij}))x(s)}{x(s)^T x(s)}\right.$$

$$\left. +2\,\frac{\text{Spur } C(x(s)) \cdot F'(x(s))}{x(s)^T x(s)}\,ds\right]$$

Bezeichnen wir die Mächtigkeit von I_i mit r_i, so erhalten wir

$$(10.24)\qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\log|x(t)|}{t}$$

$$= \lim_t \frac{1}{t}\Big[\int_0^t \sum_{i=1}^m \frac{(a_i - r_i\sigma^2)x_i^2(s) + \sum_{j\in I_i}(a_j-\sigma^2)x_j^2(s)}{x(s)^T x(s)}$$

$$+ \sigma^2 \sum_{i=1}^m \frac{r_i x_i^2(s) + \sum_{j\in I_i} x_j^2(s)}{x(s)^T x(s)}\, ds\Big]$$

Wir zerlegen nun den Eigenwert a_i in r_i Summanden

$$(10.25) \qquad a_i = \sum_{j\in I_i} b_j \quad \text{mit } b_j + a_j < 0 \qquad \text{für } j \in I_i$$

und können damit (10.24) umformen und abschätzen:

$$(10.26) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\log|x(t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\Big[\frac{1}{t}\int_0^t \sum_{i=1}^m \sum_{j\in I_i} \frac{(b_j-\sigma^2)x_i^2(s)+(a_j-\sigma^2)x_j^2(s)+\sigma^2(x_i^2(s)+x_j^2(s))}{x(s)^T x(s)}\, ds\Big]$$

$$\le \sum_{i=1}^m \sum_{j\in I_i} \Big[\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \frac{(b_j-\sigma^2)x_i^2(s)+(a_j-\sigma^2)x_j^2(s)+\sigma^2(x_i^2(s)+x_j^2(s))}{x_i^2(s)+x_i^2(s)}\Big] ds$$

Jeder in der letzten Summe von (10.26) auftretende Summand ist aber die Wachstumsrate einer zweidimensionalen stochastischen Differentialgleichung

$$(10.27) \quad d(x_i,x_j)^T = \begin{pmatrix} b_j & 0 \\ 0 & a_j \end{pmatrix}(x_i,x_j)^T dt + \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}(x_i,x_j)^T dw_1$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}(x_i,x_j)^T dw_2$$

Von dieser wissen wir jedoch (s.S.58 f und (9.11)), daß sie für genügend großes σ^2 asymptotisch stabil ist, da (10.25) gilt.
Also hat (10.27) eine negative Wachstumsrate und die Bedingung (4.12) ist für das gesamte stochastische Differentialgleichungssystem erfüllt.

Bemerkungen:

1. Physikalisch können die Störmatrizen als Drehungen interpretiert werden, so daß jeweils ein positiver Eigenwert mit einem betragsmäßig größeren negativen Eigenwert "verdreht" wird und sich eine negative - d.h. stabile - Gesamtwirkung ergibt.

2. Vgl. auch die Arbeit von Arnold/Crauel/Wihstutz: Stabilization of linear systems by noise (soll erscheinen in: SIAM J. Control 1982).

Bibliographie :

Arnold(1): Arnold, L.: Stochastische Differentialgleichungen, Oldenbourg, München-Wien, 1973

Arnold/Horsthemke/Stucki(1): Arnold, L./Horsthemke, W./Stucki, J.W.: The influence of external real and white noise on the Lotka-Volterra-model, Biom. Jour. 21 (1979) 451-471

Arnold/Wihstutz(1): Arnold, L./Wihstutz, V.: On the stability and growth of real noise parameter-exited linear systems, in: Kölzow/Kallianpur(ed.): Proc. of conf. 'Measure Theory - Applications to Stochastic Analysis', Oberwolfach 1977, Springer LN

Bellman(1): Bellman, R.: Introduction to Matrix Analysis, New York-Toronto-London, McGraw Hill, 1960

Blankenship/Papanicolaou(1): Blankenship, G./Papanicolaou, G.C.: Stability and control of stochastic systems with wide-band noise disturbances I, SIAM J.appl.math. 34 (1978) 437-476

Friedman(1): Friedman, A.: Stochastic differential equations and applications, I + II, Academic Press, 1975

Friedman/Pinsky(1): Friedman, A./Pinsky, M.: Asymptotic behavior of linear stochastic systems, Trans. AMS 181 (1973) 1-22

Hirsch/Smale(1): Hirsch, M.W./Smale, S.: Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, 1974

Khasminskii(1): Khasminskii, R.S.: Stochastic Stability of Differential Equations, Sijthoff & Noordhoff, Rockville, Maryland, USA 1980

Khasminskii(2): Khasminskii, R.S.: On the stability of the trajectory of markov-processes, PMM 26 (1962) 1554-1565

Khasminskii(3): Khasminskii, R.S.: Necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of linear stochastic systems, Theor. Prob. Appl. 12 (1967) 144-147

Kozin(1): Kozin, F.: A survey of stability of stochastic systems, Automatika 5 (1969) 95-112

Kozin/Prodromou(1): Kozin, F./Prodromou, S.: Necessary and sufficient conditions for almost sure sample stability of linear ito equations, SIAM J. appl. math. 21 (1971) 413-424

Kozin/Sugimoto(1): Kozin, F./Sugimoto, S.: Decision criteria for stability of stochastic systems from observed data, in: B.L. Clarkson(ed.): Stochastic problems in dynamics, Pitman, London, 1977, 8-33

Kozin/Sugimoto(2): Kozin, F./Sugimoto, S.: Relations between sample and moment stability for linear stochastic differential equations, in: Mason, J.D.(ed.): Proc. of conf. 'Stochastic Differential Equations and Applications 1976', Academic Press, 1977, 145-162

Kushner(1): Kushner, H.J.: Stochastic Stability and Control, Academic Press, 1967

Kushner(2): Kushner, H.J.: Stability of stochastic dynamical systems, Adv. Control Sys. 4 (1966) 73-102

LaSalle/Lefschetz(1): LaSalle, J./Lefschetz, S.: Die Stabilitätstheorie von Ljapunov - Die direkte Methode mit Anwendungen, Bibl. Inst., Mannheim, 1967

Michel/Rasmussen(1): Michel, A.N./Rasmussen, R.D.: Stability of stochastic composite systems, IEEE AC-21 (1976) 89-94

Mitchell(1):Mitchell, R.R.: Sample stability of second order stochastic differential equations with nonsingular phase diffusion, IEEE AC-17 (1972) 706-707

Mitchell/Kozin(1): Mitchell, R.R./Kozin, F.: Sample stability of second order linear differential equations with wide band noise coefficients, SIAM J. appl. math. 27 (1974) 571-605

Nevelson/Khasminskii(1):Nevelson, M.B./Khasminskii, R.S.: Stability of a linear system with random disturbances of its parameters, PMM 30 (1966) 487-494

Nevelson/Khasminskii(2): Nevelson, M.B./Khasminskii, R.S.: On the stability of stochastic systems, Probl. Trans. Inf. 2 (1966) 61-74

Nishioka(1): Nishioka, K.: On the stability of two-dimensional linear stochastic systems, Kodai math.sem.rep. 27 (1976) 211-230

Pinsky(1): Pinsky, M.A.: Stochastic stability and the Dirichlet problem, Comm. pure appl. math. 27 (1974) 311-350

Polansky(1): Polansky, P.J.: Two-dimensional stochastic exponential growth models, J. math. biol. 6 (1978) 333-342

Rasmussen/Michel(1): Rasmussen, R.D./Michel, A.N.: On vector Ljapunov functions for stochastic dynamical systems, IEEE AC-21 (1976) 250-254

Sagirow(1): Sagirow, P.S.: The stability of a satellite with parametric excitation by the fluctuations of the geomagnetic field, in: Curtain, R.F.(ed.): Stability of Stochastic Dynamical Systems, Springer LN 294, 1972, 311-316

Sasagawa(1): Sasagawa, T.: Sufficient conditions for the exponential p-stability and p-stabilizability of linear stochastic systems, Int. J. Systems Science 13 (1982) 399-408

Sussman(1): Sussmann, H.J.: On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations, Ann. prob. 6 (1978) 19-41

Willems(1): Willems, J.L.: Stability criteria for stochastic systems with colored multiplicative noise, Acta mech. 23 (1975) 171-178

Willems(2): Willems, J.L.: Ljapunov functions and global frequency domain stability criteria for a class of stochastic feedback systems. in: Curtain(ed.), 131-146 (s. Sagirow(1))

Willems(3): Willems, J.L.: Moment stability of linear white noise and coloured noise systems, in: Clarkson(ed.), 67-87 (s. Kozin/Sugimoto(1))

Lebenslauf

Geburtsdatum und Geburtsort:		23.8.1952 in Essen
Eltern	:	Hans Wüsten und Helene Wüsten, geb. Hülswitt
Familienstand	:	verheiratet seit dem 23.1.1975
Ehefrau	:	Gabriele Wüsten, geb. Hoinka
Schulausbildung	:	1959-1963: Katholische Volksschule Winzermark und Gemeinschaftsschule Nierenhof bei Hattingen 1963-1970: Städtisches neusprachliches Gymnasium Langenberg/Rhld. Reifeprüfung: 5.6.1970
Studium	:	WS 1970/71 - WS 1978/79: Mathematik, Nebenfach Philosophie an der Ruhr-Universität Bochum Diplomprüfung: 5.3.1970
Berufstätigkeit	:	seit April 1979 wissenschaftliche Hilfskraft an der Ruhr-Universität Bochum

DER DRUCKER - Buscheystraße 138 - 4630 Bochum - Tel. (02 34) 70 41 16